Frühjahr 22 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a(\cos(x) - 1) \end{pmatrix},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass es für alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ein $T > 0$ gibt, sodass die Differentialgleichung eine eindeutige Lösung auf dem Zeitintervall $(0, T)$ hat.

(b) Untersuchen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, ob die Ruhelage $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ stabil, asymptotisch stabil oder instabil ist.

Lösungsvorschlag:

(a) Die Strukturfunktion ist stetig differenzierbar, also lokal lipschitzstetig und nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert zur Anfangsbedingung $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ eine eindeutige Lösung auf einer offenen Umgebung der 0, d. h. einem Intervall (a, b) mit $a < 0 < b$. Wählt man $b = T$ ergibt sich die Aussage. Nachdem man die rechte Seite gut abschätzen kann, könnte man sogar lineares Wachstum zeigen und auf globale Existenz schließen.

(b) Wir beginnen mit dem Linearisierungssatz und erhalten für die Jacobimatrix der Strukturfunktion $J(x, y) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -a\sin(x) & -1 \end{pmatrix}$, es gilt also $J(0,0) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ mit Eigenwerten -1 und a. Ist $a < 0$, so ist die Ruhelage asymptotisch stabil, weil jeder Eigenwert negativen Realteil hat, ist $a > 0$, so ist die Ruhelage instabil, weil ein Eigenwert mit positivem Realteil existiert. Für $a = 0$ verschwindet die Abhängigkeit von $\cos(x)$ und es ergibt sich ein lineares Differentialgleichungssystem, bei dem die Matrix als Eigenwerte 0 und -1 hat. Weil es Eigenwerte mit nichtnegativem Realteil gibt, ist die Ruhelage nicht asymptotisch stabil, aber weil kein Eigenwert mit positivem Realteil existiert und bei jedem Eigenwert die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten übereinstimmen, ist die Ruhelage stabil.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$