Frühjahr 22 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

(a) Begründen Sie, dass der offene dritte Quadrant in der komplexen Ebene, d.h.

$$Q_3 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x < 0, y < 0\}$$

zu keiner der Mengen

$$E_1 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : xy > 0\}, \quad E_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}, \quad E_3 = \mathbb{C}$$

konform äquivalent ist (d.h. es existiert keine biholomorphe Abbildung $Q_3 \to E_j$ für $j = 1,2,3$).

(b) Zeigen Sie, dass es keine zwei holomorphen Funktionen $g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt, derart dass $g(\mathbb{C}) \setminus h(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$.

Lösungsvorschlag:

(a) Die Menge E_1 ist nicht zusammenhängend, weil die echte nichtleere Teilmenge $\emptyset \subsetneq Q_3 \subsetneq E_1$ in E_1 sowohl offen, als auch abgeschlossen ist. Die Menge Q_3 ist hingegen konvex also auch zusammenhängend. Weil jede holomorphe Funktion stetig ist und dass Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Funktion wieder zusammenhängend ist, kann es keine surjektive holomorphe Abbildung $Q_3 \to E_1$ geben, also auch keine biholomorphe.
Völlig analog folgt die Aussage für E_2, wenn man zusammenhängend durch einfach zusammenhängend ersetzt, Q_3 ist als konvexe Menge nämlich auch einfach zusammenhängend, E_2 jedoch nicht, weil $\gamma : [0, 2\pi] \to E_2, \gamma(t) = 2e^{it}$ nicht in E_2 zusammenziehbar ist.
Die Menge Q_3 ist ein Gebiet, nämlich offen und zusammenhängend, und nicht ganz $\mathbb{C}$, weil die 0 nicht enhalten ist. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz ist Q_3 konform äquivalent zur offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, d. h. es gibt eine biholomorphe Abbildung $f : Q_3 \to \mathbb{D}$. Wären Q_3 und $\mathbb{C}$ konform äquivalent, so gäbe es eine biholomorphe Abbildung $g : \mathbb{C} \to Q_3$, also wäre die Abbildung $f \circ g : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ ebenso biholomorph, d. h. $f \circ g$ wäre eine ganze, beschränkte Funktion und nach dem Satz von Liouville somit konstant, im Widerspruch zur Injektivität von $f \circ g$.

(b) Angenommen es gäbe zwei solche Funktionen, dann können beide nicht konstant sein. Ist nämlich g konstant, so $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D} = g(\mathbb{C}) \setminus h(\mathbb{C}) \subset g(\mathbb{C}) = \{g(0)\}$ ein Widerspruch und ist h konstant, so ist $1/g$ beschränkt, also nach dem Satz von Liouville ebenfalls konstant, was wir bereits ausgeschlossen haben, weil dazu g konstant sein muss. Beachte dazu $g(z) \neq 0$ für $z \in \mathbb{C}$, falls h konstant ist, weil das Bild von g zusammenhängend sein muss und sich aus $h(0) \cup \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ zusammensetzt, weshalb die konstante Funktion h nur Werte annehmen kann, die einen Betrag von mindestens 1 haben. Aus der Voraussetzung folgt sofort $h(\mathbb{C}) \subset \overline{\mathbb{D}}$, also ist h beschränkt und konstant nach Liouville, ein Widerspruch.

$\mathcal{J.F.B.}$