Frühjahr 22 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$. Entscheiden Sie jeweils, ob die Funktion f auf den Mengen

(a) $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$,

(b) $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x) + \sin(y) = 1\}$,

(c) $M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = 1/x\}$

ein globales Minimum und ein globales Maximum besitzt, und bestimmen Sie gegebenenfalls alle Minimal- bzw. Maximalstellen. Begründen Sie jeweils ihre Antwort.

Lösungsvorschlag:

(a) Hier nimmt die Funktion ihre Extrema an, denn f ist als Polynom stetig und die Menge ist der Rand der euklidischen Einheitskugel, also kompakt und nichtleer. Um die Extrema zu bestimmen nutzen wir die Methode von Lagrange, man könnte aber auch einige Fallunterscheidungen machen und lokal nach y auflösen. Die Nebenbedingung lässt sich auch als $g(x, y) = 0$ mit $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ schreiben, der Gradient von g ist $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)^{\mathrm{T}}$, was für alle $(x, y) \in M_1$ nicht verschwindet, denn M_1 enthält die 0 nicht. Weil Nebenbedingung und Zielfunktion glatt sind, können wir die Methode also anwenden und bestimmen die stationären Punkte der Lagrangefunktion $L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Ihr Gradient ist $\nabla L(x, y, \lambda) = (y - 2x\lambda, x - 2y\lambda, x^2 + y^2 - 1)^{\mathrm{T}}$, von dem wir die Nullstellen bestimmen wollen, also alle Komponenten auf 0 setzen. Die erste Komponente liefert $y = 2x\lambda$, was eingesetzt in die zweite Gleichung zu $x(1 - 4\lambda^2) = x - 4x\lambda^2 = 0$ führt, was wiederum nur für $x = 0$ oder $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ verschwindet. Ist $x = 0$ so liefert die erste Gleichung $y = 0$, was der dritten Gleichung widerspricht, also kann dies nicht passieren und es muss $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ gelten. Im positiven Fall werden die ersten beiden Gleichungen zu $x = y$ und im negativen Fall zu $x = -y$. Eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt sich in beiden Fällen dann $2x^2 = 1$, also $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Wir erhalten daher vier extremverdächtige Punkte, nämlich $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, in denen f Maximum und Minimum annehmen muss. Einsetzen in f liefert für den ersten und letzten Punkt den Funktionswert $\frac{1}{2}$ und für die mittleren beiden den Wert $-\frac{1}{2}$. Daher ist $\frac{1}{2}$ der globale Maximalwert, der genau in $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ angenommen wird und $-\frac{1}{2}$ ist der globale Minimalwert, der genau in $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ angenommen wird.

(b) Die Funktion besitzt weder globales Maximum noch globales Minimum, denn f ist auf M_2 nach oben und unten unbeschränkt. Die Punkte $z_k = (\frac{\pi}{2}, k\pi)$ liegen für alle $k \in \mathbb{Z}$ in M_2, denn $\sin(\frac{\pi}{2}) + \sin(k\pi) = 1 + 0 = 1$ gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$. Wegen $f(z_k) = \dfrac{k\pi^2}{2} \to \pm\infty$ für $k \to \pm\infty$ ist f also nach oben und unten unbeschränkt und nimmt daher keine globalen Extrema an.

(c) Hier nimmt die Funktion in jedem Punkt Minimum und Maximum mit Wert 1 an, denn für alle $(x, y) \in M_3$ ist $f(x, y) = x \cdot \frac{1}{x} = 1$, d. h. f ist auf M_3 konstant. ($M_3 = f^{-1}(1)$).

$\mathcal{J.F.B.}$