Aufgabenstellung und Lösung

Es ist die folgende Aufgabe zu lösen:

(a) Erklären Sie, dass die Cauchy-Integralformel einen Spezialfall des Residuensatzes darstellt.

(b) Entscheiden und begründen Sie, ob es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ mit einfachem Pol in 0 und Residuum $\operatorname*{Res}_{z=0}(f(z)) = 0$ gibt. Begründen Sie, wie sich der Sachverhalt ändert, wenn der Pol von f in 0 von zweiter anstatt erster Ordnung ist.

(c) Bestimmen Sie für jedes $r > 0$ den Wert des Integrals

$$\int\limits_{|z|=r} \frac{\sin(z)}{z^4} \, \mathrm{d}z.$$

Lösungsvorschlag: Teilaufgabe (a): Dass die Cauchy-Integralformel ein Spezialfall des Residuensatzes ist, kann man leicht zeigen: Für ein bis auf isolierte Singularitäten $s \in S$ holomorphes f und einen Weg γ, auf dessen Spur keine isolierte Singularität von f liegt, gilt nach dem Residuensatz

$$\oint\limits_{\gamma} f(z) \, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{s \in S} \operatorname*{Res}_{z=s}(f(z)).$$

Sei jetzt g holomorph auf offenem $U \subset \mathbb{C}$. Wir definieren die Funktion $\zeta \mapsto \dfrac{g(\zeta)}{\zeta - z}$, die in $z \in U$ einen Pol erster Ordnung hat. Mit dem Residuensatz und den Regeln zum Berechnen von Residuen folgt jetzt

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta = 2\pi \mathrm{i} \cdot \operatorname*{Res}_{\zeta=z} \left(\frac{g(\zeta)}{\zeta - z} \right) = 2\pi \mathrm{i} \cdot \frac{g(z)}{1} = 2\pi \mathrm{i} \cdot g(z),$$

was nichts weiter als die Cauchy-Integralformel ist.

Teilaufgabe (b): Eine solche holomorphe Funktion f kann es nicht geben. Wir nehmen an, dass es ein solches f gibt und führen das zu einem Widerspruch. Sei daher f wie gefordert. Dann ist bekanntermaßen $\operatorname*{Res}_{z=0}(f(z)) = c_{-1}$, wobei c_{-1} der Lauren-Reihen-Koeffizient des z^{-1}-Terms der Laurent-Reihe von f mit Entwicklungspunkt 0 ist. Nach Voraussetzung handelt es sich bei 0 um einen Pol erster Ordnung. Daher bricht der

Hauptteil Laurent-Reihe nach dem ersten Koeffizienten c_{-1} ab. Da dieser jedoch 0 ist, verschwindet der gesamte Hauptteil der Laurent-Reihe. Damit hat f in 0 eine hebbare Singularität. Das ist ein Widerspruch.
Im Fall eines Poles zweiter Ordnung ist das durchaus möglich. Betrachte die Abbildung $z \mapsto \frac{1}{z^2}$. Um den Entwicklungspunkt 0 ist sie ihre eigene Laurent-Reihe und offensichtlich gilt

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{1}{z^2}\right) c_{-1} = 0.$$

Teilaufgabe (c): Man bemerkt schnell, dass das gegebene Kurvenintegral geschlossen ist. Der Integrand ist meromorph und hat offenbar einen Pol dritter Ordnung in 0, denn dies ist eine vierfache Nullstelle des Nenners und eine einfach des Zählers. Es gilt dann, dass

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{\sin(z)}{z^4}\right) = \frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z^3}\left(z^4 \cdot \frac{\sin(z)}{z^4}\right) = -\frac{1}{6}\lim_{z\to 0}\cos(z) = -\frac{1}{6}$$

ist. Da dieser einzige Pol genau einmal gegen den Uhrzeigersinn umrundet wird, folgt mit dem Residuensatz für das gegebene geschlossene Kurvenintegral

$$\oint_{|z|=r}\frac{\sin(z)}{z^4}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{\sin(z)}{z^4}\right) = -\frac{2\pi\mathrm{i}}{6} = -\frac{\pi\mathrm{i}}{3}$$

für jedes feste $r > 0$.