Frühjahr 22 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Entscheiden und begründen Sie für jede Teilaufgabe (a) bis (c) jeweils, ob es Paare ganzer Funktionen (f, g) mit der genannten Eigenschaft bzw. den genannten Eigenschaften gibt. Falls ja, ist eine Charakterisierung aller solcher Funktionenpaare anzugeben.

(a) $f^2 - fg = 0$,

(b) $\max\{|f|, |g|\} \leq 1$ auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und $f(0) = 3 + g(0)$,

(c) f hat keine Nullstelle, $g(0) = 0$ und $|g - f| < |f|$ auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Lösungsvorschlag:

(a) Ja, solche Funktionen gibt es und zwar sind die Funktionenpaare genau die Paare $(0, g)$ und (g, g), wobei g eine ganze Funktion ist. Natürlich gibt es ganze Funktionen, wie beispielsweise Polynome. Seien f, g ganz mit $f^2 - fg = 0$, also $0 = f(z)^2 - f(z)g(z) = f(z)(f(z) - g(z))$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann folgt wegen der Nullteilerfreiheit jeden Körpers ($\mathbb{C}$ ist ein Körper) also für alle $z \in \mathbb{C}$ eine der beiden Gleichungen $f(z) = 0$ oder $f(z) = g(z)$. Wir betrachten jetzt $f^{-1}(0)$ und unterscheiden zwei Fälle:
$f^{-1}(0)$ hat einen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$: In diesem Fall ist f als holomorphe Funktion auf dem Gebiet $\mathbb{C}$ bereits eindeutig als Nullfunktion bestimmt und der erste Fall der Charakterisierung tritt ein.
$f^{-1}(0)$ hat keinen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$: Nun können wir ein $z \in \mathbb{C}\backslash f^{-1}(0)$ und ein $\varepsilon > 0$ finden mit $B_\varepsilon(z) \subset \mathbb{C}\backslash f^{-1}(0)$, denn wäre dies nicht so, so würde z Häufungspunkt von $f^{-1}(0)$ sein, was wir ausgeschlossen hatten. Auf der offenen Kreisscheibe $B_\varepsilon(z)$ besitzt f keine Nullstelle, also müssen dort f und g übereinstimmen, damit stimmen die auf dem Gebiet $\mathbb{C}$ holomorphen Funktionen f und g aber schon überall auf $\mathbb{C}$ überein und der zweite Fall der Charakterisierung tritt ein.

(b) Nein, die Existenz solcher Funktionen widerspräche dem Maximumsprinzip. Beide Funktionen f, g sind stetig auf $\overline{B_1(0)}$ und holomorph auf $B_1(0)$, sie nehmen ihre Maxima also auf dem Rand an. Weil beide auf dem Rand durch 1 beschränkt sind, sind sie also auch auf $B_1(0)$ durch 1 beschränkt. Damit folgt aber $|f(0) - g(0)| \leq |f(0)| + |g(0)| \leq 1 + 1 = 2$, weil natürlich 0 in der offenen Einheitskreisscheibe liegt. Wäre aber $f(0) = 3 + g(0)$, so auch $|f(0) - g(0)| = |3| = 3 > 2$, ein Widerspruch. Demnach gibt es solche Funktionen nicht.

(c) Nein, auch solche Funktionen existieren nicht, das würde dem Satz von Rouché widersprechen. Nach der Voraussetzung ist nämlich für den geschlossenen Weg $\Gamma : [0{,}2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$ die Ungleichung $|(g - f)(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in \mathrm{Spur}(\Gamma)$ erfüllt und es folgt $0 = \sum\limits_{z \in B_1(0)} \mathrm{Ord}_f(z) = \sum\limits_{z \in B_1(0)} \mathrm{Ord}_{f+g-f}(z)$. Der rechte Term ist wegen $f + g - f = g$ und $g(0) = 0$ aber strikt positiv, was einen Widerspruch zur Nullstellenfreiheit von f erzeugt. Demnach existiert kein solches Paar.

$\mathcal{J.F.B.}$