Aufgabenstellung und Lösung

Es ist die folgende Aufgabe zu lösen:

Es sei das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \sin(tx(t)), \quad x(0) = \xi$$

mit $\xi \in \mathbb{R}$ gegeben. Beweisen Sie die beiden Aussagen (a) und (b) und geben Sie eine begründete Antwort auf die Frage in (c).

(a) Das Anfangswertproblem besitzt für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung $x_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) Für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ ist die Lösung x_ξ eine gerade Funktion, das heißt $x_\xi(t) = x_\xi(-t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(c) Nimmt die Lösung x_π zum Anfangswert $\xi = \pi$ negative Werte an?

Lösungsvorschlag: *Hinweis:* Wir schreiben für eine einfachere Lesbarkeit im Folgenden in der Differentialgleichung lediglich x statt $x(t)$.

Teilaufgabe (a): Die rechte Seite der Differentialgleichung, $(t,x) \mapsto \sin(tx)$, ist stetig partiell differenzierbar nach x mit $\partial_x(\sin(tx)) = t\cos(tx)$. Insbesondere ist die rechte Seite damit lokal Lipschitz-stetig in x und das Anfangswertproblem besitzt nach dem Satz von Picard-Lindelöf für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ eine eindeutige, maximale Lösung x_ξ. Es bleibt zu zeigen, dass diese Lösung auch global ist. Betrachten wir zunächst $x_\xi : J \to \mathbb{R}$ mit $J \subset \mathbb{R}$. Wegen der Beschränktheit des Sinus ($|\sin(y)| \leq 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$) gilt

$$-1 \leq x'_\xi(t) \leq 1.$$

Also ist auch jede Lösung x_ξ der Differentialgleichung beschränkt und es gilt

$$\text{einerseits} \quad -t + \xi \leq x_\xi(t) \leq t + \xi \quad \text{für } t \geq 0,$$

$$\text{andererseits} \quad \xi + t \leq x_\xi(t) \leq \xi - t \quad \text{für } t \leq 0.$$

Wegen dieser Beschränktheit von x_ξ kann jedes $x_\xi : J \to \mathbb{R}$ in der Tat zu einer globalen Lösung, die auf ganz $\mathbb{R}$ erklärt ist, fortgesetzt werden.

Teilaufgabe (b): Aus Teilaufgabe (a) wissen wir, dass das Anfangswertproblem für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ eine eindeutige und globale Lösung hat. Wenn wir zeigen, dass die Funktion

$y_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $y_\xi(t) := x_\xi(-t)$ erklärt ist, ebenfalls eine Lösung desselben Anfangswertproblems ist, folgt wegen der Eindeutigkeit der Lösung die Behauptung $x_\xi(t) = x_\xi(-t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Um dies zu tun, betrachten wir die Ableitung von y_ξ und erhalten

$$y'_\xi(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_\xi(-t) \overset{\text{KR}}{=} (-1) \cdot x'_\xi(-t),$$

wobei wir beim zweiten Gleichheitszeichen die Kettenregel (KR) verwendet haben. Zusammen mit der Differentialgleichung ergibt sich, wenn wir zunächst $x'_\xi(-t)$ einsetzen und im zweiten Schritt die Funktion y_ξ benutzen, nun

$$x'_\xi(-t) = \sin(-t x_\xi(-t)) \quad \underset{x_\xi(-t) = y_\xi(t)}{\overset{\text{Einsetzen}}{\Longleftrightarrow}} \quad y'_\xi(t) = (-1) \cdot \sin(-t y_\xi(t)) = \sin(t y_\xi(t)),$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass die Sinusfunktion eine ungerade Funktion ist, also $-\sin(-y) = \sin(y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt. Die Funktion y_ξ erfüllt also offenbar auch die gegebenen Differentialgleichung. Weil auch noch

$$y_\xi(0) = x_\xi(-0) = x_\xi(0) = \xi$$

gilt, löst y_ξ sogar dasselbe Anfangswertproblem wie x_ξ, woraus mit der Eindeutigkeit der Lösung folgt, dass $x_\xi(t) = y_\xi(t) = x_\xi(-t)$ ist. Genau das ist die Behauptung.

Teilaufgabe (c): Für $\xi = 0$ ist offensichtlich $x_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x_0(t) = 0$ die eindeutige und globale Lösung des Anfangswertproblems. Da $x_\pi(0) = \pi > 0 = x_0(0)$ gilt, verläuft die globale und eindeutige Lösung des Anfangswertproblems für $\xi = \pi$ komplett in der oberen Halbebene des Koordinatensystems. Das folgt aus dem Vergleichsprinzip für die Lösungen skalarer Differentialgleichungen: Es gilt die obige Ungleichung nicht nur für eine Stelle, sondern für alle $t \in \mathbb{R}$. Graphisch gesehen kann die stetige Lösung x_π die ebenfalls stetige Lösung x_0 niemals schneiden. Daher bleibt die *Reihenfolge*, die die Lösungen an einer Stelle (etwa bei $t = 0$) haben, auch an allen anderen Stellen $t \in \mathbb{R}$ erhalten.

$\mathcal{J}.\mathcal{S}.$