Frühjahr 22 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Man betrachte das ebene autonome System

$$x' = 1 - x - Rxy,$$
$$y' = Rxy - y$$

für einen reellen Parameter $R \neq 1$.

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von R alle stationären Punkte des Systems, die im abgeschlossenen ersten Quadranten, d.h. in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$, liegen.

(b) Linearisieren Sie das System jeweils um die in (a) bestimmten Ruhelagen und untersuchen Sie diese auf Stabilität.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir suchen die Nullstellen. Für die zweite Gleichung gilt $Rxy - y = 0 \iff (Rx - 1)y = 0$, woraus $y = 0$ oder $Rx - 1 = 0$ folgt. Ist $R = 0$ besitzt die zweite Gleichung keine Lösung, sonst aber genau die Lösung $x = \frac{1}{R}$.
Ist $y = 0$, so verschwindet die erste Gleichung genau für $x = 1$, ist $R \neq 0$ und $x = \frac{1}{R}$, so verschwindet die erste Gleichung genau für $y = 1 - \frac{1}{R}$. Für $R = 0$ erhalten wir also nur die Ruhelage (1,0), für $R \neq 0$ erhalten wir neben dieser noch die Ruhelage $(\frac{1}{R}, 1 - \frac{1}{R})$, die wegen $R \neq 1$ verschieden von (1,0) ist. Andere Ruhelagen gibt es nicht. (1,0) liegt im Quadranten, die anderen Ruhelagen liegen genau für $R > 1$ im Quadranten, weil aus der ersten Komponente $R > 0$ und damit aus der zweiten $R > 1$ folgt, wegen $R \neq 0$.

(b) Wir bestimmen die Jacobimatrix der Strukturfunktion. Es gilt $J(x, y) = \begin{pmatrix} -1 - Ry & -Rx \\ Ry & Rx - 1 \end{pmatrix}$ und setzen die Ruhelagen ein. Es gilt $J(1{,}0) = \begin{pmatrix} -1 & -R \\ 0 & R - 1 \end{pmatrix}$ mit Eigenwerten -1 und $R - 1$, für $R < 1$ haben beide Eigenwerte negativen Realteil und die Ruhelage ist stabil, für $R > 1$ gibt es einen Eigenwert mit positivem Realteil und die Ruhelage ist instabil. Für $R = 0$ ist also die einzige Ruhelage stabil. Sei jetzt $R \neq 0$, dann gibt es eine zweite Ruhelage, deren entsprechende Matrix $\begin{pmatrix} -R & -1 \\ R - 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist. Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 + R\lambda + R - 1$ mit den Nullstellen $\lambda_\pm = \dfrac{-R \pm (R - 2)}{2}$, also hat die Matrix Eigenwerte $x_1 = -1$ und $x_2 = 1 - R$. Für $R > 1$ haben beide Eigenwerte negativen Realteil und die Ruhelage ist stabil, für $R < 1$ gibt es einen Eigenwert mit positivem Realteil und die Ruhelage ist instabil, liegt aber auch nicht im ersten Quadranten.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$