Frühjahr 22 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)

> $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ bezeichne die offene Einheitskreisscheibe.
>
> (a) Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion, die unendlich viele Nullstellen in der punktierten Kreisscheibe $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ besitzt. Zeigen Sie, dass die Singularität von f in $z = 0$ wesentlich ist.
>
> (b) Zeigen Sie, dass jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit
>
> $$f(z) \cdot ((f \circ f)(z) - 1) = 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D}$$
>
> konstant ist.

Lösungsvorschlag:

(a) Es gibt mindestens abzählbar viele Nullstellen, d. h. eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}\backslash\{0\}$ von paarweise verschiedenen Nullstellen von f. Weil $\mathbb{D}$ durch 1 beschränkt ist, die Folge demnach auch, muss es nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt der Folge in $\mathbb{C}$ geben. Wäre dieser nicht 0, so würde die Funktion f nach dem Identitätssatz bereits die Nullfunktion, also konstant sein, ein Widerspruch. Daher muss sich die Folge in der 0 häufen. Die Singularität kann nicht hebbar sein, weil dann wie zuvor f bereits konstant 0 sein muss, 0 ist aber auch kein Pol, weil wir eine Nullfolge $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ finden, für die $f(z_{n_k}) = 0$ ist, die Bildwerte also beschränkt bleiben. Der einzig verbleibende Fall ist, dass die Singularität von f bei 0 wesentlich ist.

(b) Damit die Gleichung der Voraussetzung wohldefiniert ist, muss $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ gelten. Also ist $(f \circ f)(z) - 1 = f(f(z)) - 1 \neq 0$, weil $1 \notin \mathbb{D}$ ist, also $f(f(z)) \neq 1$ ist. Daher folgt aus der Gleichung bereits $f(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{D}$ und damit ist f konstant.
Man kann auch noch etwas anders argumentieren: Damit obige Gleichung erfüllt ist, muss für alle $z \in \mathbb{D}$ eine der Gleichungen $f(z) = 0$ oder $f(f(z)) = 1$ erfüllt sein, d. h. es muss $f(z) \in \{0\} \cup f^{-1}(1)$ gelten. Weil f stetig ist, ist letztere Menge abgeschlossen. Wenn f nicht konstant ist, darf $f^{-1}(1)$ keinen Häufungspunkt in $\mathbb{D}$ haben (Identitätssatz), außerdem muss das Bild $f(\mathbb{D})$ ein Gebiet sein. Es ist also $f(\mathbb{D}) \subset \{0\} \cup f^{-1}(1)$ und $f^{-1}(1) \subset \mathbb{D}$ hat innere Punkte und daher sehr wohl einen Häufungspunkt in $\mathbb{D}$. Widerspruch.

J.F.B.