**Frühjahr 22 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)**

(a) Bestimmen Sie explizit die Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) = \pi \cos t \cdot (1 + x^2(t)), \quad x(0) = 0$$

und deren maximales Existenzintervall.

(b) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit

$$\langle f(x), x \rangle = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad f(0) = 0.$$

(Hierbei bezeichnet $\langle ., . \rangle$ das euklidische Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.)
Zeigen Sie, dass für jede Lösung $x : I \to \mathbb{R}^n$ der autonomen Differentialgleichung $x' = f(x)$ die euklidische Norm $t \mapsto \|x(t)\|$ konstant ist und dass die Ruhelage 0 dieser Differentialgleichung stabil ist.

**Lösungsvorschlag:**

(a) Weil die Strukturfunktion stetig differenzierbar, also lokal lipschitzstetig ist, ist die Maximallösung zu jedem Anfangswert eindeutig bestimmt. Durch Trennung der Variablen erhält man, die Lösung $x(t) = \tan(\pi \sin(t))$. Der Tangens ist für Argumente zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ definiert, also existiert die Lösung für alle $t$ mit $|\sin(t)| < \frac{1}{2}$. Mit der Arkussinusfunktion erhält man also $(\arcsin(-\frac{1}{2}), \arcsin(\frac{1}{2})) = (-\arcsin(\frac{1}{2}), \arcsin(\frac{1}{2}))$ als maximales Existenzintervall.

(b) Wir werden zeigen, dass $g : t \mapsto \|x(t)\|^2$ konstant ist, weil $\|\cdot\|$ nur nichtnegative Werte annimmt, ist dann auch $t \mapsto \|x(t)\|$ konstant. Wir bestimmen die Ableitung von $g$ und erhalten wegen $g(t) = \langle x(t), x(t) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i(t) \cdot x_i(t)$ für die Ableitung $g'(t) = \sum_{i=1}^n x_i'(t) \cdot x_i(t) + x_i(t) \cdot x_i'(t) = 2 \sum_{i=1}^n x_i'(t) \cdot x_i(t) = 2\langle f(x(t)), x(t) \rangle = 0$. Damit ist $g$ stetig differenzierbar und konstant 0, also $g$ konstant. Um Stabilität zu zeigen, nutzen wir die Definition. Nach Voraussetzung ist 0 eine Nullstelle von $f$ also eine Ruhelage. Weil die Norm jeder Lösung konstant ist, insbesondere jede Lösung also beschränkt bleibt, existiert jede maximale Lösung global. Für alle $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta = \varepsilon$ und erhalten für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| < \delta$ für die Lösung zur Anfangsbedingung $x(0) = \xi$ also $\|x(t) - 0\| = \|x(t)\| = \|x(0)\| = \|\xi\| < \delta = \varepsilon$. Per Definitionem ist 0 stabil.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$