Frühjahr 22 Themennummer 1 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

(a) Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f'(0) = 0 < f''(0)$ und $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\xi > 0$ mit $f'(\xi) = 0$.

(b) Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f konvergiert. Zudem sei

$$F_n(x) \coloneqq \int_0^x f_n(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{für alle } x \in [0,1] \text{ und alle } n \in \mathbb{N}.$$

Begründen Sie kurz, dass die Integralfunktion

$$F(x) \coloneqq \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

auf $[0,1]$ wohldefiniert ist, und zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen F konvergiert.

Lösungsvorschlag:

(a) Weil f'' stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass $f''(x) > 0$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$ gilt (Stetigkeitsdefinition mit $\varepsilon = f''(0)$), also ist f' auf $(-\delta, \delta)$ streng monoton wachsend. Wegen $f'(0) = 0$, folgt $f'(x) > 0$ für $x \in (0, \delta)$ und auch f wächst streng monoton auf $(0, \delta)$ und erfüllt $f(x) > 0$ für $x \in (0, \delta)$. Wegen $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, gibt es ein $x_0 > \delta$ mit $f(x_0) < 0$. Weil f als C^2-Funktion auch stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle τ von f im Intervall $(\frac{\delta}{2}, x_0)$. Die Funktion f ist nun stetig auf $[0, \tau]$, erfüllt $f(0) = 0 = f(\tau)$ und ist differenzierbar auf $(0, \tau)$. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Rolle.

(b) Als gleichmäßiger Grenzwert einer Folge von stetigen Funktionen ist f selbst stetig und daher Riemann-integrierbar, also F wohldefiniert. Für alle $x \in [0,1]$ gilt nun

$$\begin{aligned} |F(x) - F_n(x)| &= \left| \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^x f_n(t)\ \mathrm{d}t \right| = \left| \int_0^x f(t) - f_n(t)\ \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_0^x |f(t) - f_n(t)|\ \mathrm{d}t \leq x \left\| f_n - f \right\|_\infty \leq \left\| f_n - f \right\|_\infty . \end{aligned}$$

Die Abschätzung gilt für alle $x \in [0,1]$, also ist $0 \leq \left\| F - F_n \right\|_\infty \leq \left\| f_n - f \right\|_\infty \to 0$ und nach dem Sandwichlemma/Schachtelungssatz folgt die Behauptung.

$\mathcal{J.F.B.}$