F21T3A5

Wir betrachten das Anfangswertproblem $\dot{x}(t) = v\big(x(t)\big), x(0) = \xi \in \mathbb{R}^2$ für das gegebene Vektorfeld $v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,; v \to v(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -{x_1}^5 \\ {x_1}^4 x_2 + {x_1}^2 \cos\left(\frac{1}{x_1}\right) \end{pmatrix}$ $für\ x_1 \neq 0\ bzw.\ v(0, x_2) = 0$.

a) Begründen Sie, dass v stetig ist.

b) Geben Sie die erste Komponente $x_1(t)$ der Lösung x : I → ℝ² explizit an.

c) Zeigen Sie, dass $\Gamma = \left\{(r, \frac{1}{r}\sin\left(\frac{1}{r}\right) : r > 0\right\}$ die Trajektorie zum Anfangswert $x = \left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$ ist.

d) Begründen Sie, dass alle Fixpunkte von v instabil sind.

Zu a)

Auf ℝ² sind $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,; (x_1, x_2) \to -x_1^5$ und $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,; (x_1, x_2) \to x_1^4 x_2$ stetig als Polynome. Für eine Folge $\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0, x_2)$ ist $0 \leq \left|\left(x_1^{(n)}\right)^2 \cos\left(\frac{1}{x_1^{(n)}}\right) - 0\right| \leq \left|x_1^{(n)}\right|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, also ist auch $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,; (x_1, x_2) \to x_1^2 \cos\left(\frac{1}{x_1}\right)$ stetig und daher ist v stetig.

Zu b)

Das Anfangswertproblem liefert $x_1' = -x_1^5$ und $x_2' = \begin{cases} {x_1}^4 x_2 + {x_1}^2 \cos\left(\frac{1}{x_1}\right) & ; x_1 \neq 0 \\ 0 & ; x_1 = 0 \end{cases}$. Die erste Komponente erfüllt $x_1' = -x_1^5 \,; x_1(0) = \xi_1$ (1)

Für $\xi_1 = 0$ ist $\lambda_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,; t \to 0$ die eindeutige maximale Lösung von (1); für $\xi_1 \neq 0$ erhalten wir durch Trennen der Variablen $\int_{\xi_1}^{\lambda_1(t)} \frac{1}{-s^5} ds = \left[\frac{1}{4s^4}\right]_{\xi_1}^{\lambda_1(t)} = \int_0^t 1\, ds = t$, also $\frac{1}{4\left(\lambda_1(t)\right)^4} = t - \frac{1}{4\xi_1^4}$ und damit $\lambda_1(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{4t - \xi_1^{-4}}} = (4t - \xi_1^{-4})^{-\frac{1}{4}}\ für\ t > -4\xi_1^{-4}$. Es gilt $\lambda_1(0) = (\xi_1^{-4})^{-\frac{1}{4}} = |\xi_1|$ und $\lambda_1'(t) = -\frac{1}{4}(4t - \xi_1^{-4})^{-\frac{5}{4}} * 4 = -\left(\lambda_1(t)\right)^5$. Somit ist $\lambda_1:]-4\xi_1^{-4}; \infty[\to \mathbb{R} \,; t \to \frac{sign(\xi_1)}{\sqrt[4]{4t - \xi_1^{-4}}}$ eine Lösung von (1) und wegen $|\lambda_1(t)| \xrightarrow[t \searrow -4\xi_1^{-4}]{} \infty$ ist es auch die maximale Lösung.

Zu c)

Für $\xi = \frac{1}{\pi}$ ergibt sich $\lambda_1:]-\frac{\pi^4}{4}; \infty[\to \mathbb{R} \,; t \to (4t + \pi^4)^{-\frac{1}{4}}$ als maximale Lösung für die erste Komponente und die zweite Differentialgleichung ist dann gegeben durch
$x_2' = (4t + \pi^4)^{-1} x_2 + (4t + \pi^4)^{-\frac{1}{2}} \cos\left((4t + \pi^4)^{\frac{1}{4}}\right); x_2(0) = 0$, also eine skalare inhomogene lineare Differentialgleichung mit stetigen Koeffizientenfunktionen, hat also laut Lösungsformel die Lösung $\lambda_2:]-\frac{\pi^4}{4}; \infty[\to \mathbb{R} \,;$

$t \to \exp\left(\int_0^t (4s+\pi^4)^{-1} ds\right) \int_0^t \exp\left(-\int_0^r (4s+\pi^4)^{-1} ds\right) \left((4r+\pi^4)^{-\frac{1}{2}} \cos\left((4r+\pi^4)^{\frac{1}{4}}\right)\right) dr =$
$\exp\left(\left[\ln(4s+\pi^4) * \frac{1}{4}\right]_0^t\right) \int_0^t \exp\left(-\left[\ln(4s+\pi^4) * \frac{1}{4}\right]_0^r\right) \left((4r+\pi^4)^{-\frac{1}{2}} \cos\left((4r+\pi^4)^{\frac{1}{4}}\right)\right) dr =$
$\frac{1}{\pi}(4t+\pi^4)^{\frac{1}{4}} \int_0^t \pi(4r+\pi^4)^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} \cos\left((4r+\pi^4)^{\frac{1}{4}}\right) dr = (4t+\pi^4)^{\frac{1}{4}} \left[\sin\left((4r+\pi^4)^{\frac{1}{4}}\right)\right]_0^t =$
$(4t+\pi^4)^{\frac{1}{4}} \sin\left((4t+\pi^4)^{\frac{1}{4}}\right) = \left(\lambda_{1(t)}\right)^{-1} \sin\left(\left(\lambda_{1(t)}\right)^{-1}\right) = \frac{1}{\lambda_{1(t)}} \sin\left(\frac{1}{\lambda_{1(t)}}\right).$

Weil $\lambda_1(t) = (4t+\pi^4)^{-\frac{1}{4}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ und $\lambda_1'(t) = -\frac{1}{4}(4t+\pi^4)^{-\frac{5}{4}} * 4 < 0$ ist λ_1 streng monoton fallend, also $\lambda_1\left(\left]-\frac{\pi^4}{4};\infty\right[\right) =]0;\infty[$.

Die Trajektorie ist damit

$$\left\{\left(\lambda_1(t),\lambda_2(t)\right): t \in \left]-\frac{\pi^4}{4};\infty\right[\right\} = \left\{\left(\lambda_{1(t)}, \frac{1}{\lambda_{1(t)}} \sin\left(\frac{1}{\lambda_{1(t)}}\right)\right): t \in \left]-\frac{\pi^4}{4};\infty\right[\right\} = \left\{\left(r, \frac{1}{r}\sin\left(\frac{1}{r}\right)\right): r > 0\right\}$$

Zu d)

Die Fixpunkte von $\dot{x}(t) = v(x(t))$ sind genau die Nullstellen von $v(x_1,x_2)$, also $-x_1^5 = 0 \iff$ $x_1 = 0$ und $v(0,x_2) = 0 \iff x_2 \in \mathbb{R}$.

Für einen Startwert $(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2$ ist die Lösung $\lambda(t) = \left(\lambda_1(t),\lambda_2(t)\right)$ mit $\lambda_1(t)$ wie in (b) und
$\lambda_2 :]-4\xi^{-4};\infty[\to \mathbb{R}\,; t \to \exp\left(\int_0^t \frac{1}{4s+\xi_1^{-4}} ds\right)\left(\xi_2 + \int_0^t \exp\left(-\int_0^r \frac{1}{4s+\xi_1^{-4}} ds\right) \frac{\cos\left(\sqrt[4]{4r+\xi_1^{-4}}\right)}{\sqrt{4r+\xi_1^{-4}}} dr\right) =$
$\dots = (4t+\xi_1^{-4})^{\frac{1}{4}}\left(\xi_1\xi_2 + \sin\left((4t+\xi_1^{-4})^{\frac{1}{4}}\right) - \sin\left(\frac{1}{|\xi_1|}\right)\right)$. Diese bleibt nicht in der Nähe von ξ_2.