F21T3A4

Es seien $f: [1,\infty[\to \mathbb{R}\,; x \to \frac{\sin(\ln(x))}{x}$, $g: [1,\infty[\to \mathbb{R}\,; x \to \frac{\sin(e^{-x})}{x}$ und $h: [1,\infty[\to \mathbb{R}\,; x \to \frac{\sin(\pi x)}{x}$.

a) Entscheiden Sie, ob f uneigentlich integrierbar ist. Nutzen Sie hierfür eine geeignete Substitution unter dem Integral.
b) Entscheiden Sie, ob g uneigentlich integrierbar ist. Schätzen Sie dazu den Integranden geeignet ab.
c) Begründen Sie, dass h uneigentlich integrierbar ist. Vergleichen Sie dazu den Integralwert mit der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, wobei $a_k = \int_k^{k+1} \frac{\sin(\pi x)}{x} dx$ gilt, oder lösen Sie die Aufgabe durch partielle Integration.

Zu a)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx = \int_1^n \sin(\ln(x))\,(\ln(x))'\,dx = \int_{\ln(1)}^{\ln(n)} \sin(y)\,dy = [-\cos(y)]_0^{\ln(n)} = 1 - \cos(ln(n))$ und da $\cos(ln(n))$ keinen Grenzwert für $n \to \infty$ besitzt, ist f nicht uneigentlich integrierbar.

Zu b)

Für alle y > 0 ist laut Zwischenwertsatz $\sin(y) = \sin(y) - \sin(0) = (y-0)\cos(\xi)\ \ f\ddot{u}r\ ein\ \xi \in [0; y]$, also ist $|\sin(y)| \leq y$. Daher ist $\left|\frac{\sin(e^{-x})}{x}\right| \leq \frac{e^{-x}}{|x|} \leq e^{-x}\ f\ddot{u}r\ alle\ x \geq 1.$

Wegen $e^{-x} \geq 0$ ist $\mathbb{1}_{[1;n]}(x)e^{-x} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{1}_{[1;\infty]}(x)e^{-x}$ also folgt nach dem Satz von der monotonen Konvergenz $\int_1^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n e^{-x}dx = \lim_{n\to\infty}([e^{-x}]_1^n) = \lim_{n\to\infty}(1-e^{-n}) = 1$, deshalb ist $m: [1;\infty[\to [0;\infty[\,; x \to e^{-x}$ eine integrierbare Majorante von g, weshalb g integrierbar – und damit auch uneigentlich integrierbar – ist.

Zu c)

$\sin(\pi x)\begin{cases} \in [0;1] & ; x \in [2k; 2k+1], k \in \mathbb{Z} \\ \in [-1;0] & ; x \in [2k+1; 2k+2] \end{cases}$ deshalb ist $\int_{2k}^{2k+1} \frac{\sin(\pi x)}{x} dx \geq 0$, $\int_{2k+1}^{2k+2} \frac{\sin(\pi x)}{x} dx \leq 0.$

$\frac{1}{2k+1} \leq \int_{2k}^{2k+1} \frac{\sin(\pi x)}{x} dx \leq \frac{1}{2k}$ und $\frac{-1}{2k+1} \leq \int_{2k-1}^{2k+2} \frac{\sin(\pi x)}{x} dx \leq \frac{-1}{2k+2}$, also bildet $\left(\int_k^{k+1} \frac{\sin(\pi x)}{x} dx\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine alternierende Folge so dass $\left(\left|\int_k^{k+1} \frac{\sin(\pi x)}{x} dx\right|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend mit Grenzwert 0 ist. Nach dem Leibnizkriterium konvergiert dann die alternierende Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\int_k^{k+1} \frac{\sin(\pi x)}{x} dx\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Wegen $\int_k^{k+1} \left|\frac{\sin(\pi x)}{x}\right| dx \leq \frac{|y-k|}{k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\ f\ddot{u}r\ y \in [k; k+1]$ gilt $\lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{\sin(\pi x)}{x} dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\int_k^{k+1} \frac{\sin(\pi x)}{x} dx\right)\right)$, deshalb ist h uneigentlich integrierbar.