F21T3A3

Für $\alpha > 0$ ist die Funktion $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x, y) \to x + \alpha y$ gegeben und wir definieren für $n \in N$ die Funktionen $g_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x, y) \to x^{2n} + y^{2n}$.

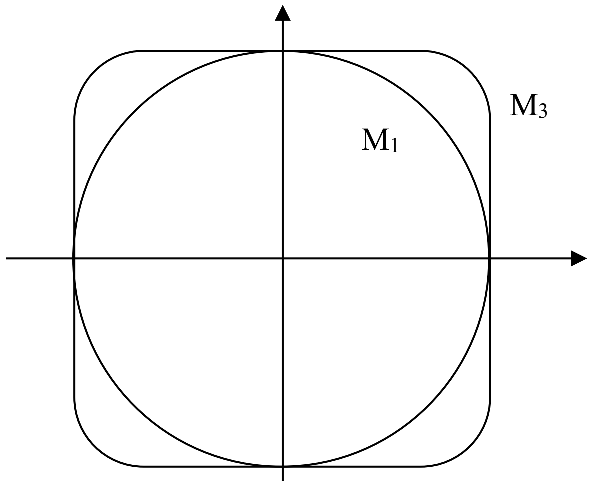
a) Skizzieren Sie die Mengen $M_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_n(x, y) = 1\}$ für n = 1, 2, 3 in einem Bild.

b) Begründen Sie, warum f_α auf jedem M_n Maximum und Minimum annimmt.

c) Bestimmen Sie für jedes $n \in N$ die entsprechende Lage (x_n , y_n) des Maximums von f_α unter der Nebenbedingung $g_n = 1$.

d) Bestimmen Sie die Grenzwerte von $(x_n)_{n\in N}$ und $(y_n)_{n\in N}$.

zu a)



Zu b)

$M_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2n} + y^{2n} = 1\} \subseteq [-1;1]^2$ ist beschränkt und $M_n = g^{-1}(\{1\})$ ist als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{1\}$ unter der stetigen Funktion g_n abgeschlossen. Als beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist M_n kompakt und daher nimmt die stetige reellwertige Funktion f_α auf M_n ein Minimum und ein Maximum an.

Zu c)

$(grad\ g_n)(x,y) = \binom{2nx^{2n-1}}{2ny^{2n-1}} \neq \binom{0}{0}\ für\ alle\ (x,y) \in M_n = g_n^{-1}(\{1\})$, deshalb ist die lineare Abbildung $\big(D(g_n - 1)\big)(x,y) = \big(D(g_n)\big)(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,; (\xi,\eta) \to \langle (grad\ g_n)(x,y)\,, (\xi,\eta)\rangle$ nicht die Nullfunktion und daher surjektiv für jedes $(x,y) \in M_n$. Für jedes Extremum $p = (p_1,p_2) \in M_n$ von f_α unter der Nebenbedingung M_n gibt es einen Lagrangemultiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\big(grad(f_\alpha + \lambda g_n)\big)(p_1,p_2) = 0, p_1^{2n} + p_2^{2n} = 1$. Mit $\big(grad(f_\alpha + \lambda g_n)\big)(p_1,p_2) = \binom{1+\lambda 2np_1^{2n-1}}{\alpha+\lambda 2np_2^{2n-1}}$ ergibt sich

i) $1 + \lambda 2np_1^{2n-1} = 0 \quad \to \quad \lambda 2n = -\frac{1}{p_1^{2n-1}}$ in (ii)

ii) $\alpha + \lambda 2np_2^{2n-1} = 0 \quad \to \quad \alpha - \frac{1}{p_1^{2n-1}} p_2^{2n-1} = \alpha - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2n-1} = 0 \Rightarrow \alpha^{\frac{1}{2n-1}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)$

iii) $p_1^{2n} + p_2^{2n} = 1 \quad \to \quad p_1^{2n}\left(1 + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2n}\right) = 1$; dieses ergibt

$p_1^{2n}\left(1+\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2n}\right) = p_1^{2n}\left(1+\alpha^{\frac{2n}{2n-1}}\right) = p_1^{2n}\left(1+\alpha^{1+\frac{1}{2n-1}}\right) = 1$, also $p_1 = \pm\left(1+\alpha^{1+\frac{1}{2n-1}}\right)^{-\frac{1}{2n}}$

und $p_2 = \pm(1-p_1^{2n})^{\frac{1}{2n}} = \pm\left(1-\left(1+\alpha^{1+\frac{1}{2n-1}}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2n}}$.

Da nach (b) $\min\{f_\alpha(x,y) : (x,y) \in M_n\} \leq \max\{f_\alpha(x,y) : (x,y) \in M_n\}$ existieren und nach (c) in einem der Punkte (p_1, p_2), ($-p_1$, p_2), (p_1, $-p_2$), ($-p_1$, $-p_2$) angenommen werden und da wegen $\alpha > 0$ auch $f_\alpha(p_1,p_2) = p_1 + \alpha p_2 \geq \begin{cases} f_\alpha(p_1,-p_2) = p_1 - \alpha p_2 \\ f_\alpha(-p_1,p_2) = -p_1 + \alpha p_2 \end{cases} \geq f_\alpha(-p_1,-p_2) = -p_1 - \alpha p_2$

gilt, wird bei $(x_n, y_n) = (p_1, p_2) = \left(\left(1+\alpha^{1+\frac{1}{2n-1}}\right)^{-\frac{1}{2n}}, \left(1-\left(1+\alpha^{1+\frac{1}{2n-1}}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2n}}\right)$ das Maximum

von f_α auf M_n angenommen.

Zu d)

Wegen $\alpha > 0$ gilt $\alpha^{1+\frac{1}{2n-1}} \leq \begin{Bmatrix} 1\ ;\ \alpha \leq 1 \\ \alpha^2;\ \alpha > 1 \end{Bmatrix} \leq \max\{1; \alpha^2\}$ und somit gilt wegen $\sqrt[n]{p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \ \ \forall p > 0$ auch

$1 \leq \left(1+\alpha^{1+\frac{1}{2n-1}}\right)^{\frac{1}{2n}} \leq (1+\max\{1;\alpha^2\})^{\frac{1}{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, also $\left(1+\alpha^{1+\frac{1}{2n-1}}\right)^{-\frac{1}{2n}} = \frac{1}{\left(1+\alpha^{1+\frac{1}{2n-1}}\right)^{\frac{1}{2n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Wegen $\alpha > 0$ gilt $\alpha^{1+\frac{1}{2n-1}} \geq \begin{Bmatrix} \alpha^2;\ \alpha \leq 1 \\ \alpha\ ;\ \alpha > 1 \end{Bmatrix} \geq \min\{\alpha; \alpha^2\}$ und somit gilt

$1+\min\{\alpha;\alpha^2\} \leq 1+\alpha^{1+\frac{1}{2n-1}} \leq 1+\max\{1;\alpha^2\}$ und damit

$0 < (1-(1+\min\{\alpha;\alpha^2\})^{-1})^{\frac{1}{2n}} \leq \left(1-\left(1+\alpha^{1+\frac{1}{2n-1}}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2n}} \leq (1-(1+\max\{1;\alpha^2\})^{-1})^{\frac{1}{2n}}$ und

zusätzlich gilt $(1-(1+\min\{\alpha;\alpha^2\})^{-1})^{\frac{1}{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ und $(1-(1+\max\{1;\alpha^2\})^{-1})^{\frac{1}{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, also

auch $\left(1-\left(1+\alpha^{1+\frac{1}{2n-1}}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Somit gilt $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (1;1)$