F21T3A2

a) Bestimmen Sie den Wert des komplexen Kurvenintegrals $\int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{z^2+2z+1}dz$ für die Kurve $\gamma : [-3;3] \to \mathbb{C}\,;\ t \to 3e^{i\pi t}$.

b) Es sei $G := \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 4\}$. Zeigen Sie: Es existiert eine holomorphe Funktion h : G → ℂ derart, dass $\frac{z-1}{z+1} = e^{h(z)}$ für jedes z ∈ G gilt.

Zu a)

Die Kurve γ parametrisiert eine Kreislinie um 0 mit Radius 3 und Umlaufzahl $n(\gamma,0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{-3}^{3}\frac{3e^{i\pi t}i\pi}{3e^{i\pi t}}dt = \frac{1}{2}\int_{-3}^{3} 1\,dt = 3 = n(\gamma,w)\ f\text{ür } |w| < 3.$

Die Funktion $z^2+2z+1 = (z+1)^2$ hat die doppelte Nullstelle -1, deshalb ist

$f\colon \mathbb{C}\backslash\{-1\} \to \mathbb{C}\,; z \to \frac{\sin(\pi z)}{z^2+2z+1} = \frac{\sin(\pi z)}{(z+1)^2}$ holomorph. Da auch $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,; z \to \sin(\pi z)$ holomorph ist, folgt laut Cauchy-Integralformel $n(\gamma,-1)g'(-1) = \frac{1!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(z)}{\big(z-(-1)\big)^{1+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{(z+1)^2}dz$, also

$\int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{z^2+2z+1}dz = 2\pi i * 3 * \pi\cos(-\pi) = -6\pi^2 i$

Zu b)

$f\colon G \to \mathbb{C}\,; z \to \frac{z-1}{z+1}$ ist nullstellenfrei und holomorph (als Quotient von holomorphen Funktionen mit nullstellenfreiem Nenner). $f'(z) = \frac{(z+1)*1-(z-1)*1}{(z+1)^2} = \frac{2}{(z+1)^2}$ und damit ist auch $\frac{f'}{f}\colon G \to \mathbb{C}\,; z \to \frac{2}{(z+1)^2}\frac{z+1}{z-1} = \frac{2}{z^2-1}$ holomorph, mit holomorpher Fortsetzung $g\colon G \to \mathbb{C}\,; z \to \frac{2}{z^2-1}$.

Wegen $\lim_{z\to 1}|g(z)| = \infty = \lim_{z\to -1}|g(z)|$ sind 1 und -1 Pole von g. Da $\lim_{z\to 1}(z-1)g(z) = \lim_{z\to 1}\frac{2}{z+1} = 1$ und $\lim_{z\to -1}(z+1)g(z) = \lim_{z\to -1}\frac{2}{z-1} = -1$ existieren, sind 1 und -1 Pole erster Ordnung von g mit Res(g, 1) = 1 und Res(g, -1) = -1.

Ist nun γ ein geschlossener, stückweiser C^1-Weg in G, dann ist $Spur(\gamma) \cap \{-1;1\} = \emptyset$ und γ ist als geschlossener Weg nullhomolog in $\mathbb{C} = \underbrace{(\mathbb{C}\backslash\{-1;1\})}_{Def.ber.\ v.\ g} \cup \underbrace{\{-1;1\}}_{Sing.\ v.\ g}$. Somit gilt nach dem Residuensatz

$\int_\gamma g(z)dz = 2\pi i\big(n(\gamma;1)Res(g;1) + n(\gamma;-1)Res(g;-1)\big) = 2\pi i\big(n(\gamma;1) - n(\gamma;-1)\big) = 0,$

denn $M := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\} \subseteq G$ ist wegen $Spur(\gamma) \subseteq G$ in einer Zusammenhangskomponente von ℂ \ Spur(γ) enthalten, also ist die Umlaufzahl n(γ, *) auf M konstant.

Somit gilt $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_\gamma g(z)dz = 0$ für jeden geschlossenen, stückweisen C^1-Weg γ in G. Damit existiert eine holomorphe Stammfunktion $F\colon G \to \mathbb{C}$ von $\frac{f'}{f}\colon G \to \mathbb{C}$.

Da $(fe^{-F})'(z) = e^{-F(z)}\Big(f'(z) + f(z)\big(-F'(z)\big)\Big) = e^{-F(z)}\Big(f'(z) - f(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\Big) = 0$ gilt, ist fe^{-F} konstant auf G, also gibt es ein $c = e^{\xi} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $f(z)e^{-F(z)} = e^{\xi}$ für alle z ∈ G.

Somit gilt: $\frac{z-1}{z+1} = f(z) = f(z)e^{-F(z)}e^{F(z)} = e^{\xi}e^{F(z)} = e^{\xi+F(z)} = e^{h(z)}$ für $h := \xi + F : G \to \mathbb{C}\,; z \to \xi + F(z)$ holomorph.