F21T2A5

Gegeben sei die Menge $S \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y(y^2 - x) = 0\}$

und die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \backslash S \to \mathbb{R}\,; (x,y) \to \frac{1}{2y} + \frac{x^3}{y(y^2-x)}$ zusammen mit dem Anfangswertproblem

$y = f(x,y)\ ;\ y(x_0) = y_0$ (1) wobei $(x_0, y_0) \in R^2 \backslash S$ zu wählen ist.

a) Fertigen Sie eine beschriftete Skizze der Menge S an und begründen Sie, warum (1) für alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \backslash S$ eine eindeutig bestimmte maximale Lösung besitzt.
b) Sei y : I → R die maximale Lösung von (1) und $E:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x,y) \to (y^2 - x)^2 - x^4$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi: I \to \mathbb{R}\,; x \to E\big(x, y(x)\big)$ konstant ist.
c) Sei $x_0 = 0$. Bestimmen Sie die Menge der $y_0 > 0$, für die die maximale Lösung von (1) auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Zu a)

$S \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y(y^2 - x) = 0\} = \{(x,0) :\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y^2 = x\}.$

Für stetiges $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,; (x,y) \to y(y^2 - x)$ gilt $g^{-1}(\{0\}) = S$, also ist S abgeschlossen, also $\mathbb{R}^2 \backslash S$ offen.

Die Funktion f ist stetig differenzierbar (als Quotient von Polynomen mit nullstellenfreiem Nenner).

Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \backslash S$, d.h. die vier Mengen

$X_1 \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y > 0, y^2 > x\}, X_2 \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y < 0, y^2 > x\},$

$X_3 \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y > 0, y^2 < x\}, X_4 \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y < 0, y^2 < x\}$ sind ebenfalls offen.

Daher hat jedes Anfangswertproblem $y' = f|_{X_l}(x,y)\,, y(x_0) = y_0$ eine eindeutige maximale Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$ mit $\Gamma(\lambda) = \big\{\big(x, \lambda(x)\big): x \in I\big\} \subseteq X_l\ f\ddot{u}r\ (x_o, y_0) \in X_l$.

Zu b)

Die Funktion E ist stetig differenzierbar. Ist λ die maximale Lösung von (1), so ist $\varphi: I \to \mathbb{R}\,; x \to E\big(x, \lambda(x)\big)$ stetig differenzierbar (als Komposition von stetig differenzierbaren Funktionen) mit

$\varphi'(x) = \langle grad(E)\begin{pmatrix} x \\ \lambda(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda'(x) \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} -2\big(\big(\lambda(x)\big)^2 - x\big) - 4x^3 \\ 2\big(\big(\lambda(x)\big)^2 - x\big) * 2\lambda(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ f\big(x, \lambda(x)\big) \end{pmatrix} \rangle = -2\big(\lambda(x)\big)^2 + x - 4x^3 + 2\big(\lambda(x)\big)^2 - 2x + 4x^3 = 0.$

Weil φ auf dem Intervall I die Ableitung 0 hat, ist φ konstant.

Zu c)

Da φ nach (b) konstant ist, gilt für die Anfangsbedingung $(0, y_0)\ mit\ y_0 > 0: E(0, y_0) = y_0^4 = E\big(x, \lambda(x)\big) = \Big(\big(\lambda(x)\big)^2 - x\Big)^2 - x^4 = \big(\lambda(x)\big)^4 - 2x\big(\lambda(x)\big)^2 + x^2 - x^4.$

Dies liefert $\left(\left(\lambda(x)\right)^2 - x\right)^2 - x^4 - y_0^4 = 0$ , also $\left(\lambda(x)\right)^2 = x \pm \sqrt{x^4 + y_0^4}$. Diese Nullstellen von $x \pm \sqrt{x^4 + y_0^4}$ sind zugleich auch Nullstellen von $x^4 - x^2 + y_0^4$, erfüllen also $x_{1,2}^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y_0^2}}{2}$.

i) Für $y_0 > \frac{1}{2}$ gibt es also keine Nullstelle von $x + \sqrt{x^4 + y_0^4} = \left(\lambda(x)\right)^2$ in $\mathbb{R}$, weshalb

$\lambda(x) \coloneqq \sqrt{x + \sqrt{x^4 + y_0^4}}$ für alle x $\in \mathbb{R}$ definiert ist, da z.B. $\lambda(0) = \sqrt{\sqrt{y_0^4}} = |y_0| = y_0 > 0$.

$$\lambda'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x^4+y_0^4}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^4+y_0^4}} * 4x^3\right) = \frac{1}{2\lambda(x)}\left(1 + \frac{4x^3}{2\left(\left(\lambda(x)\right)^2 - x\right)}\right) = \frac{1}{2\lambda(x)} + \frac{x^3}{\lambda(x)\left(\left(\lambda(x)\right)^2 - x\right)},$$ also

$\lambda'(x) = f\left(x, \lambda(x)\right)$ und $\lambda(x) > 0; \left(\lambda(x)\right)^2 = x + \sqrt{x^4 + y_0^4} > x$. Damit ist λ für $y_0 = \frac{1}{2}$ eine Lösung von (1) mit $\Gamma(\lambda) = \left\{\left(x, \lambda(x)\right): x \in \mathbb{R}\right\} \subseteq X_1$, also auch von $y' = f|_{X_1}(x, y); y(0) = y_0 > \frac{1}{2}$

Da λ auf $\mathbb{R}$ definiert ist, hat es das Randverhalten einer maximalen Lösung.

ii) Für $y_0 \leq \frac{1}{2}$ ist $c \coloneqq -\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-4y_0^2}}{2}} \in \left]-\infty; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$$\lambda(c) = c + \sqrt{c^4 + y_0^4} = c + \sqrt{\frac{\left(1+\sqrt{1-4y_0^2}\right)^2 + 4y_0^4}{4}} = 0.$$

Für $x > c$ gilt: $\lambda(x) > 0; \lambda(0) = y_0; \lambda'(x) = f\left(x, \lambda(x)\right)$ und daher ist

$\lambda: ]c; \infty[ \to \mathbb{R}\, ; x \to x + \sqrt{x^4 + y_0^4}$ eine Lösung von (1) für $y_0 \leq \frac{1}{2}$ mit $\lambda(x) \underset{x \searrow c}{\longrightarrow} 0$ und $\Gamma(\lambda) \subseteq X_1$ somit die maximale Lösung von $y' = f|_{X_1}(x, y); y(0) = y_0 \leq \frac{1}{2}$.