F21T2A4

Für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ bezeichne $B_r(a) := \{z \in \mathbb{C}: |z-a| < r\}$ die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt a und Radius r. Weiter seien $D_+ := B_{\sqrt{2}}(1), D_- := B_{\sqrt{2}}(-1)$ *und* $D := D_+ \cap D_-$. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Funktion G zu bestimmen, die D biholomorph auf die Einheitskreisscheibe $B_1(0)$ abbildet.

a) Begründen Sie, warum es eine solche Funktion G geben muss und warum diese keine Möbiustransformation sein kann.
b) Zeigen Sie: ∂D_+ und ∂D_- schneiden sich in den beiden Punkten i und $-i$ jeweils im Winkel $\frac{\pi}{2}$.
c) Es sei $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,; z \to \frac{i+z}{i-z}$. Zeigen Sie $T(D) = \left\{re^{i\varphi} : r > 0, \varphi \in \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[\right\} := U$
   Hinweis: Bestimmen Sie zunächst das Bild der Geraden $i\mathbb{R}$ und dann der beiden Kreislinien ∂D_- und ∂D_+ unter der winkeltreuen Möbiustransformation T.
d) Bestimmen Sie eine explizite Darstellung einer biholomorphen Abbildung h von U auf $B_1(0)$ und leiten Sie hieraus eine explizite Darstellung der gesuchten Funktion G ab.

Zu a)

Da D als Durchschnitt von zwei offenen Kreisscheiben offen und konvex ist und da $\emptyset \neq D \neq \mathbb{C}$ ist, ist D ein nichtleeres, einfach zusammenhängendes Gebiet und deshalb gibt es nach dem Riemannschen Abbildungssatz eine biholomorphe Abbildung $G : D \to B_1(0)$. G kann nicht die Einschränkung einer Möbiustransformation sein, denn dann ist auch $G^{-1} : B_1(0) \to D$ die Einschränkung einer Möbiustransformation $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ und damit $\varphi(\partial B_1(0)) = \partial D$ eine verallgemeinerte Kreislinie im Widerspruch zur Definition von D.

Zu b)

Für die Parametrisierung $\gamma_+ : [0; 2\pi] \to \mathbb{C}\,; t \to 1 + \sqrt{2}e^{-it}$ von ∂D_+ und

$\gamma_- : [0; 2\pi] \to \mathbb{C}\,; t \to -1 + \sqrt{2}e^{-it}$ von ∂D_- ist

$\gamma_+\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 1 + \sqrt{2}\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) = i = \gamma_-\left(\frac{3}{4}\pi\right)$ und $\gamma_+\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 1 + \sqrt{2}\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right) = -i = \gamma_-\left(\frac{5}{4}\pi\right)$.

Die Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}\,; t \to i + t\,\gamma_+'\left(\frac{3}{4}\pi\right) = i + t\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}(i) = i + t\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi i}(-i)$ und

$\mathbb{R} \to \mathbb{C}\,; t \to i + t\,\gamma_-'\left(\frac{3}{4}\pi\right) = i + t\sqrt{2}e^{-\frac{3}{4}\pi i}(-i) = i + t\sqrt{2}e^{-\frac{9}{4}\pi i}(-i) = i + t\sqrt{2}e^{\frac{7}{4}\pi i}(-i)$

parametrisieren die Tangenten an ∂D_- und ∂D_+ in i und zwischen $\frac{5}{4}\pi$ und $\frac{7}{4}\pi$ ist ein Winkel von $\frac{\pi}{2}$, unter dem sich beide Tangenten schneiden.

Analog ist $\gamma_+'\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi i}(i) = \sqrt{2}e^{\frac{7}{4}\pi i}$ und $\gamma_-'\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{5}{4}\pi i}(-i) = \sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi i}$.

Zu c)

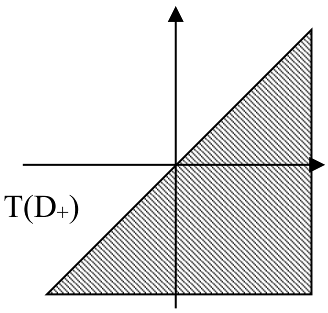
$T: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}\,; z \to \begin{cases} \frac{i+z}{i-z}\,; z \in \mathbb{C}\backslash\{i\} \\ \infty\,; z = i \\ -1\,; z = \infty \end{cases}$ definiert wegen $\det\begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} = i - (-i) = 2i \neq 0$ eine Möbiustransformation. Für $y \in \mathbb{R}$ ist $T(iy) = \frac{i+iy}{i-iy} = \frac{1+y}{1-y} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, also wird durch T die verallgemeinerte Kreislinie $i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ auf die verallgemeinerte Kreislinie $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ abgebildet.

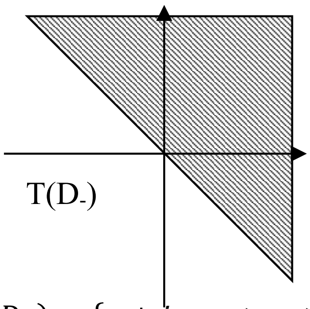
$T(1) = \frac{i+1}{i-1} = \frac{(1+i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$, deshalb wird die rechte Halbebene auf die untere Halbebene abgebildet, also $T(\{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}) = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) < 0\}$ und $T(\{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0\}) = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$.

Es sind i und -i die Schnittpunkte der (verallgemeinerten) Kreislinien Spur(γ_+) und Spur(γ_-) mit T(i) = ∞ und T(-i) = 0. Wegen T(i) = ∞ sind die Bilder $T\big(Spur(\gamma_+)\big)$ und $T\big(Spur(\gamma_-)\big)$ Geraden durch ∞ und 0.

Es gilt $1 + i\sqrt{2} \in Spur(\gamma_+), -1 + i\sqrt{2} \in Spur(\gamma_-)$ mit $T\big(1 + i\sqrt{2}\big) = \cdots = \frac{-2-2i}{1+\left(1-\sqrt{2}\right)^2} \in \{z = x + iy \ \in \mathbb{C} : x = y\}$ und $T\big(-1 + i\sqrt{2}\big) = \cdots = \frac{-2+2i}{1+\left(1-\sqrt{2}\right)^2} \in \{z = x + iy \ \in \mathbb{C} : x = -y\}$.
Damit ist $T\big(Spur(\gamma_+)\big) = \{x + ix : x \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$ und $T\big(Spur(\gamma_-)\big) = \{x - ix : x \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$.

Es gilt $2i \notin D_+ und\ T(2i) = -3$. Da die Zusammenhangskomponente D_+ von $\hat{\mathbb{C}}\backslash Spur(\gamma_+)$ auf eine Zusammenhangskomponente von $\hat{\mathbb{C}}\backslash T\big(Spur(\gamma_+)\big)$ abgebildet wird, ist $T(D_+) = \{x + iy : x > y\}$ und ebenso ist $T(D_-) = \{x + iy : y > -x\}$.





Da T bijektiv ist, ist $T(D) = T(D_+ \cap D_-) = T(D_+) \cap T(D_-) = \{x + iy : x > y > -x\} = \left\{re^{i\varphi} : r > 0, \varphi \in \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[\right\} = U$

Zu d)

$f_1: U \to \{z : Re(z) > 0, Im(z) > 0\}\,; z \to e^{\frac{i\pi}{4}}z$ ist bijektiv und holomorph, also biholomorph.

$f_2: \{z : Re(z) > 0, Im(z) > 0\} \to \{z : Im(z) > 0\}\,; z \to z^2$ ist holomorph und bijektiv

$f_3: \{z : Im(z) > 0\} \to B_1(0)\,; z \to \frac{z-i}{z+i}$ ist biholomorph als Einschränkung der Cayley-Transformation.

Somit gilt: $h = f_3 \circ f_2 \circ f_1 = U \to B_1(0)$ ist biholomorph als Komposition bihol. Funktionen.

Da T biholomorph ist mit T(D) = U, ist auch die Einschränkung $f_4 : D \to U\,; z \to T(z)$ biholomorph und $G := h \circ f_4 : D \to B_1(0)$ ist biholomorph.