F21T2A2

Sei G ⊆ ℂ ein Gebiet, d.h. eine nichtleere, offene und zusammenhängende Teilmenge von ℂ. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen über alle holomorphen Funktionen f : G → ℂ gelten. Bei richtigen Aussagen geben Sie eine kurze Begründung mit Nennung aller benutzten Sätze an, bei falschen ein Gegenbeispiel.

a) Ist G = ℂ und f beschränkt, so ist f konstant.
b) Ist G = ℂ \{0} und f beschränkt, so ist f konstant.
c) Ist G die offene rechte Halbebene und f beschränkt, so ist f konstant.
d) Ist G ein beschränktes Gebiet und hat f unendlich viele Nullstellen, so ist f konstant.
e) Ist G ein beschränktes Gebiet und hat f unendlich viele Nullstellen in einer kompakten Teilmenge von G, so ist f konstant.
f) Ist G ein beschränktes Gebiet, so ist f(G) beschränkt.

Zu a)

WAHR nach dem Satz von Liouville

Zu b)

WAHR, denn da f beschränkt ist, ist die Singularität bei 0 hebbar nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz; deshalb gibt es eine holomorphe Fortsetzung F : ℂ → ℂ, die ebenfalls beschränkt ist und somit konstant nach dem Satz von Liouville; insbesondere ist f = $F|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ konstant.

Zu c)

FALSCH; Gegenbeispiel

$f\colon\{z\in\mathbb{C}: Re(z)>0\}\to\mathbb{C}\,; z\to e^{-z}$ ist wegen $|f(z)|=|e^{-z}|=e^{-Re(z)}<1\, für\ Re(z)>0$ beschränkt, aber nicht konstant.

Zu d)

FALSCH; Gegenbeispiel:

$f\colon\{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}: |z|<1\}\to\mathbb{C}\,; z\to\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ ist holomorph, $f\left(\frac{1}{k\pi}\right)=\sin(k\pi)=0\ für\ alle\ k\in\mathbb{N}$, deshalb hat f auf $\left\{\frac{1}{k\pi} : k\in\mathbb{N}\right\}$ unendlich viele Nullstellen, ist aber nicht konstant.

Zu e)

WAHR, denn

Nach Voraussetzung gibt es eine Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $K\subseteq G$ kompakt mit $f(z_k)=0\ für\ alle\ k\in\mathbb{N}$ und $z_k\neq z_l\ für\ alle\ k,l\in\mathbb{N}\ mit\ k\neq l.$

Da K kompakt ist, hat die Folge eine konvergente Teilfolge $\left(z_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ $mit\ z_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} z \in K$. Da auch $\left(z_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise verschiedene Folgenglieder besitzt, ist der Grenzwert z ein Häufungspunkt der Menge $\left\{z_{k_n}: n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \{z_k \in G : f(z_k) = 0\}$.

Wegen $z_k \in K \subseteq G$ gilt $f(z_k) = 0$ für alle $z_k \in G$ nach dem Identitätssatz.

Zu f)

FALSCH; Gegenbeispiel wie in (d):

$f: \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}: |z| < 1\} \to \mathbb{C}\,; z \to \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ ist holomorph und hat in 0 eine wesentliche Singularität, somit ist $f(\{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}: |z| < 1\})$ dicht in $\mathbb{C}$ nach dem Satz von Casorati-Weierstraß, also unbeschränkt.

$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2k+1}$ ist die Laurentreihe von f um 0; diese hat im Hauptteil unendlich viele Koeffizienten ungleich 0; somit ist 0 wesentliche Singularität.