F21T2A1

a) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = 0$ für alle n ∈ ℕ gilt.
b) Bestimmen Sie die Menge D ⊆ ℝ aller Punkte, in denen die Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;x \to f(x) := \begin{cases} x\cos(x^{-1}) & ;x \neq 0 \\ 0 & ;x = 0 \end{cases}$$ differenzierbar ist und berechnen Sie für diese Punkte die Ableitung von f. Ist $f'\colon D \to \mathbb{R}$ stetig?
c) Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$. Skizzieren Sie die Menge D und berechnen Sie das Integral $I := \int_D (x^3 + y^2)dxdy$.

Zu a)

Nach binomischem Lehrsatz gilt: $0 = 0^n = \big(1 + (-1)\big)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k$ für alle n ∈ ℕ.

Zu b)

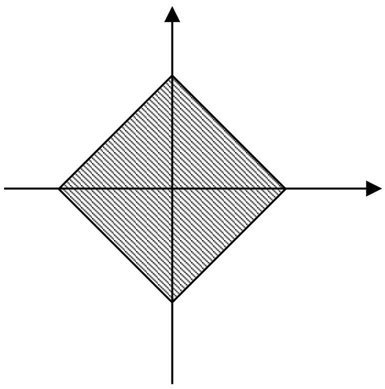
Für $x \neq 0$ ergibt sich laut Produkt-, Ketten- und Quotientenregel:

$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ und

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ hat keinen Grenzwert für x→0

Daher ist f nur auf D = ℝ\{0} differenzierbar, nicht aber in 0. Die Ableitung ist stetig auf D (hat aber keine stetige Fortsetzung auf ℝ).

Zu c)



Da D kompakt und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,; (x,y) \to x^3 + y^2$ stetig ist, lässt sich I unter Verwendung des Satzes von Fubini berechnen.

Bei vorgegebenem $y \in [-1;1]$ gilt $|x| + |y| \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-(1-|y|); 1-|y|]$, somit gilt:
$\int_D (x^3 + y^2)dxdy = \int_D (x^3)dxdy + \int_D (y^2)dxdy = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, denn

$\int_D (x^3)dxdy = \int_{-1}^{1} 1 \int_{-(1-|y|)}^{1-|y|} (x^3)dx\ dy = \int_{-1}^{1} 1\ \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-(1-|y|)}^{1-|y|} dy = \int_{-1}^{1} 0\ dy = 0$ und

$\int_D (y^2)dxdy = \int_{-1}^{1} y^2 \int_{-(1-|y|)}^{1-|y|} 1\ dx\ dy\ = \int_{-1}^{1} y^2(2-2|y|)\ dy = \int_{-1}^{1} 2y^2 - 2|y^3|\ dy =$
$\int_{-1}^{1} 2y^2\ dy - \int_{-1}^{1} 2|y^3|\ dy = \int_{-1}^{1} 2y^2\ dy - 2\int_{0}^{1} 2y^3\ dy = \left[\frac{2}{3}y^3\right]_{-1}^{1} - [y^4]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2(-1)^3}{3} = \frac{1}{3}.$