F21T1A5

a) Es sei n ∈ ℕ. Bestimmen Sie die Lage und die Ordnung der Pole der meromorphen Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$.

b) Zeigen Sie, dass für n ≥ 2 gilt: $\int_0^\infty f(z)\,dz = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$

Hinweis: Betrachten Sie das Wegintegral $\int_\gamma f(z)\,dz$ für den geschlossenen Weg γ, der von 0 in gerader Linie nach R, von dort auf dem Kreissegment nach $R\,e^{\frac{2\pi i}{n}}$ und von hier aus in gerader Linie wieder zurück nach 0 verläuft.

Zu a)

Für n ∈ ℕ hat 1 + z^n genau die Nullstellen $z_k = e^{\frac{i\pi}{n}+\frac{2\pi i}{n}k}$ $für\ k = 0; 1; \ldots; n-1$ und diese sind einfach. Deshalb ist $\lim_{z\to z_k} |f_n(z)| = \infty$ für $f_n: \mathbb{C}\setminus\left\{e^{\frac{i\pi}{n}+\frac{2\pi i}{n}k} : k = 0; 1; \ldots; n-1\right\} \to \mathbb{C}; z \to \frac{1}{1+z^n}$, also ist $z_k; k = 0; 1; \ldots; n-1$ ein Pol von f_n und $\lim_{z\to z_k}(z - z_k)f_n(z)$, weshalb z_k ein Pol erster Ordnung ist mit $Res(f_n; z_k) = \lim_{z\to z_k}(z - z_k)f_n(z) = \frac{1}{n\,z_k^{n-1}}$.

Zu b)

$\left|\frac{1}{1+z^n}\right| \leq \left\{\begin{array}{ll} 1 & ; z \in [0; 1] \\ \frac{1}{1+z^2} & ; z \in [1; \infty[\end{array}\right\} =: h(z)$ und da $\int_0^\infty h(z)dz = \int_0^1 1\,dz + \int_1^\infty \frac{1}{1+z^2}dz = 1 + \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{1+z^2}dz = 1 + \lim_{n\to\infty}[\arctan(z)]_1^n = 1 + \frac{\pi}{2} - \arctan(1) < \infty$, ist h eine integrierbare Majorante, weshalb alle Integrale existieren und $\int_0^\infty \frac{1}{1+z^n}dz = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{1+z^n}dz$ erfüllen.

Sei nun $\gamma = \gamma_1 \dotplus \gamma_2 \dotplus \gamma_3$ der aus den Wegen $\gamma_1: [0; R] \to \mathbb{C}; t \to t$, $\gamma_2: \left[0; \frac{2\pi}{n}\right] \to \mathbb{C}; t \to Re^{it}$ und $\gamma_3: [0; R] \to \mathbb{C}; t \to te^{\frac{2\pi i}{n}}$ zusammengesetzte geschlossene Weg. Da $Spur(\gamma) \cap \{z_k : k = 0; 1; \ldots; n-1\} = \emptyset\ für\ alle\ R > 1$ und von den isolierten Singularitäten als einzige $z_0 = e^{\frac{i\pi}{n}}$ von γ (einmal) umlaufen wird, gilt nach dem Residuensatz für alle R > 1:

$$\int_\gamma f_n(z)dz = 2\pi i\, n(\gamma, z_0)Res(f_n, z_0) = 2\pi i * 1 * \frac{1}{n}e^{-\frac{i\pi}{n}(n-1)} = \frac{2\pi i}{n}e^{-i\pi}e^{\frac{i\pi}{n}} = \frac{-2\pi i}{n}e^{\frac{i\pi}{n}}$$

$$\left|\int_{\gamma_2} f_n(z)dz\right| = \left|\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{1}{1+\left(Re^{it}\right)^n} iRe^{it}\,dt\right| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{\left|iRe^{it}\right|}{\left|1+\left(Re^{it}\right)^n\right|}\,dt \leq (*) \leq \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{R}{R^n - 1}dt = \frac{2\pi}{n}\frac{R}{R^n-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

(*) $\left|1 + \left(Re^{it}\right)^n\right| \geq \left||1| - \left|\left(Re^{it}\right)^n\right|\right| = \left||1| - R^n\left|\left(e^{it}\right)^n\right|\right| = |1 - R^n| = R^n - 1, da\ R > 1.$

$$\int_{\gamma_3} f_n(z)dz = -\int_{-\gamma_3} f_n(z)dz = -\int_0^R \frac{1}{1+\left(te^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^n}e^{\frac{2\pi i}{n}}\,dt = -e^{\frac{2\pi i}{n}}\int_0^R \frac{1}{1+t^n}\,dt = -e^{\frac{2\pi i}{n}}\int_{\gamma_1} f_n(z)\,dz.$$

Es gilt $\frac{-2\pi i}{n} e^{\frac{i\pi}{n}} = \int_\gamma f_n(z)dz = \lim_{R\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{\gamma_1} f_n(z)dz + \int_{\gamma_2} f_n(z)dz + \int_{\gamma_3} f_n(z)dz \right) = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{\gamma_1} f_n(z)dz \right) + \lim_{R\to\infty} \left(\int_{\gamma_2} f_n(z)dz \right) + \lim_{R\to\infty} \left(\int_{\gamma_3} f_n(z)dz \right) = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{\gamma_1} f_n(z)dz \right) + 0 - e^{\frac{2\pi i}{n}} \lim_{R\to\infty} \left(\int_{\gamma_1} f_n(z)dz \right) = \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) \lim_{R\to\infty} \left(\int_{\gamma_1} f_n(z)dz \right) = \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) \lim_{R\to\infty} \left(\int_0^R \frac{1}{1+t^n} dt \right) = \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) \int_0^\infty \frac{1}{1+t^n} dt.$

Somit gilt $\int_0^\infty \frac{1}{1+t^n} dt = \frac{1}{1-e^{\frac{2\pi i}{n}}} \left(\frac{-2\pi i}{n} e^{\frac{i\pi}{n}} \right) = \frac{-2\pi i}{n} \frac{1}{e^{\frac{-\pi i}{n}} - e^{\frac{\pi i}{n}}} = \frac{\pi}{n} \frac{1}{\frac{e^{\frac{\pi i}{n}} - e^{\frac{-\pi i}{n}}}{2i}} = \frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$