F21T1A4

Es sei g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; t \to \frac{2t}{1-t^2}$.

a) Geben Sie alle Lösungen mit maximalem Existenzintervall der Differentialgleichung $y'(t) + a(t)y(t) = g(t)$ an. (1)
b) Zeigen Sie, dass für jede solche Lösung y dieser Differentialgleichung gilt: $y(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, wenn $tg(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ erfüllt ist.

Zu a)

Es ist (1) eine lineare, inhomogene Differentialgleichung, deren Koeffizienten g und a stetige auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktionen sind. Die maximale Lösung $\lambda_{\tau,\xi}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differntialgleichung $y'(t) + a(t)y(t) = g(t), y(\tau) = \xi$ ist damit gegeben durch:

$\lambda_{\tau,\xi}(t) = \exp\left(-\int_\tau^t \frac{2s}{1-s^2}\,ds\right)\xi + \exp\left(-\int_\tau^t \frac{2s}{1-s^2}\,ds\right)\int_\tau^t \exp\left(+\int_\tau^r \frac{2s}{1-s^2}\,ds\right) g(r)\,dr =$ $\exp([-\ln(1+s^2)]_\tau^t)\,\xi + \exp([-\ln(1+s^2)]_\tau^t)\int_\tau^t \exp([-\ln(1+s^2)]_\tau^r)\,g(r)\,dr = \frac{1-\tau^2}{1-t^2}\xi +$ $\frac{1-\tau^2}{1-t^2}\int_\tau^t \frac{1-r^2}{1-\tau^2} g(r)\,dr = \frac{1-\tau^2}{1-t^2}\xi + \frac{1}{1-t^2}\int_\tau^t (1+r^2)g(r)\,dr.$

Zu b)

Ist nun $tg(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $T_\varepsilon \geq 1$ mit $|tg(t)| < \varepsilon$ für alle $t \geq T_\varepsilon$.

Damit ist $\left|\frac{1}{1-t^2}\int_\tau^t (1+r^2)g(r)\,dr\right| = \left|\frac{1}{1-t^2}\int_\tau^{T_\varepsilon}(1+r^2)g(r)\,dr + \frac{1}{1-t^2}\int_{T_\varepsilon}^t (1+r^2)g(r)\,dr\right| \leq$ [1] $\leq$ $\frac{1}{1-t^2}|T_\varepsilon - \tau| \sup\{(1+r^2)|g(r)| : r \in [\tau; T_\varepsilon]\}$ [2] $+ \frac{1}{1-t^2}\int_{T_\varepsilon}^t (\varepsilon + r\varepsilon)\,dr = \frac{c|T_\varepsilon - \tau|}{1-t^2} + \frac{1}{1-t^2}\Big([\varepsilon r]_{T_\varepsilon}^t +$ $\left[\frac{\varepsilon r^2}{2}\right]_{T_\varepsilon}^t\Big) \leq \frac{1}{1-t^2}\left(c|T_\varepsilon - \tau| + \varepsilon t + \frac{\varepsilon}{2}t^2\right) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\varepsilon}{2}$. Da diese Abschätzung für jedes $\varepsilon > 0$ gilt und da $\frac{1-\tau^2}{1-t^2}\xi \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt, folgt $\lambda_{\tau,\xi}(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$

---

[1] Es gilt: $T_\varepsilon \geq 1 \implies |g(r)| \leq r|g(r)| \leq \varepsilon \; und \; r^2|g(r)| = |r||rg(r)| \leq r\varepsilon \; für \; r \geq T_\varepsilon$

[2] Es gilt: $c \coloneqq \sup\{(1+r^2)|g(r)| : r \in [\tau; T_\varepsilon]\} < \infty$ ist unabhängig von t.