F21T1A2

a) Formulieren Sie den Satz von Rouché.
b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $z + e^{-z} = 2021$ in der Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$ genau eine Lösung besitzt.
c) Zeigen Sie, dass diese Lösung reell ist.

Zu a)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}, g: U \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma: [a; b] \to U$ geschlossener, stückweiser C^1-Weg in U und es gelte $|f(\gamma(t))| < |g(\gamma(t))|$ $für\ alle\ t \in [a; b]$.

Dann hat g keine Nullstelle auf Spur(γ) und in $\{z \in U \backslash Spur(\gamma) : n(\gamma; z) \neq 0\}$ (d.h. im Inneren von γ) haben g und f+g mit Vielfachheiten gezählt gleich viele Nullstellen.

Zu b)

Die Lösungen von $z + e^{-z} = 2021$ sind die Nullstellen von $h: \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,; z \to z + e^{-z} - 2021$.

Mit $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,; z \to e^{-z}$, $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,; z \to z - 2021$ und $\gamma = \gamma_1 \dotplus \gamma_2\ mit\ \gamma_1: [-R; R] \to \mathbb{C}\,; t \to it$ und $\gamma_2: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{C}\,; t \to Re^{it}$ gilt:

$\forall\ t \in [-R; R]$ gilt: $|g(\gamma_1(t))| = |it - 2021| = \sqrt{t2 + 2021^2} \geq 2021 > 1 = |e^{-it}| = |f(\gamma_1(t))|$.

Für $R \geq 2023\ und\ alle\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ gilt $|g(\gamma_2(t))| = |Re^{it} - 2021| \geq |R - 2021| \geq 2 > 1 = e^{-Rcos(t)} = e^{Re(-Re^{it})} = \left|e^{-Re^{it}}\right| = |f(\gamma_2(t))|$.

Somit haben für jedes $R \geq 2023$ nach dem Satz von Rouché g und h = f+g in $H_R \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0; |z| < R\}$ mit Vielfachheit gezählt gleich viele Nullstellen. Da g nur eine einfache Nullstelle bei 2021 hat – und diese für $R \geq 2023$ in H_R liegt, hat h in jedem Halbkreis H_R, $R \geq 2023$, genau eine Nullstelle. Deshalb hat h auch in der Halbebene $\{z \in \mathbb{C}: Re(z) > 0\} = \bigcup_{R \geq 2023} H_R$ genau eine Nullstelle.

Zu c)

$h|_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; x \to x + e^{-x} - 2021$ ist stetig und reellwertig mit $h|_{\mathbb{R}}(0) = -2020 < 0$ und $h|_{\mathbb{R}}(2021) = e^{-2021} > 0$. Daher hat $h|_{\mathbb{R}}$ auf]0; 2021[mindestens eine Nullstelle laut Zwischenwertsatz.

Die laut (b) einzige Nullstelle von h in $\{z \in \mathbb{C}: Re(z) > 0\}$ liegt also in]0; 2021[und ist daher reell.