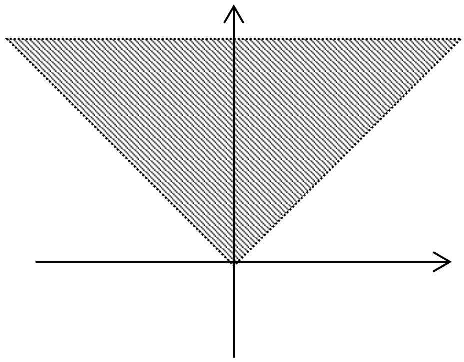
F21T1A1

Es seien $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|\}$ und $f: D \to \mathbb{R}\,; (x, y) \to 4x^2 + 9y - \frac{1}{3}y^3$

a) Skizzieren Sie die Menge D.
b) Zeigen Sie, dass f auf D ein globales Maximum besitzt.
c) Bestimmen Sie den Wert dieses globalen Maximums von f sowie sämtliche Stellen, an denen dieser Wert angenommen wird.

Zu a)



Zu b)

Für $(x, y) \in D\ ist |x| \leq y, also\ f(x, y) = 4x^2 + 9y - \frac{1}{3}y^3 \leq 4y^2 + 9y - \frac{1}{3}y^3$.

Für $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; y \to 4y^2 + 9y - \frac{1}{3}y^3$ ist $g'(y) = 8y + 9 - y^2 = (y + 1)(y - 9)$, also gilt

$g'(y) \begin{cases} < 0\,; y \in]-\infty; -1[\\ > 0\ ;\ y \in]-1;\ 9[\\ < 0\ ;\ \ y \in]9; \infty[\end{cases}$ und deshalb hat g bei y = 9 ein globales Maximum. Damit hat f(D) die obere Schranke bei 9, deshalb existiert $\sup\{f(x, y): (x, y) \in D\} \in \mathbb{R}$. Wegen f(9,9) = g(9) = 162 wird dieses Supremum auch angenommen, also hat $f|_D$ ein Maximum.

Zu c)

$gradf(x, y) = \binom{8x}{9-y^2} = \binom{0}{0} \Leftrightarrow (x, y) = (0; 3) \in D\ oder\ (x, y) = (0; -3) \notin D.$

$(Hessf)(x, y) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix}$, also ist $(Hessf)(0,3) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ mit Eigenwerten -6, 8 mit verschiedenen Vorzeichen, deshalb ist $(0; 3) \in D$ ein Sattelpunkt und kein lokales Extremum.