F20T3A5

Berechnen Sie für alle a ∈ ℝ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

x''(t) + x(t) = sin(at).

Untersuchen Sie, für welche Werte des Parameters a jede Lösung Φ : ℝ → ℝ unbeschränkt ist.

Lösung:

Dies ist eine inhomogene lineare DGL zweiter Ordnung. Die zugehörige homogene lineare DGL x'' + x = 0 hat das charakteristische Polynom $z^2 + 1 = (z+i)(z-i)$, also die unabhängigen komplexwertigen Lösungen $v_1: \mathbb{R} \to C; t \to e^{it}$, $v_2: \mathbb{R} \to C; t \to e^{-it}$ bzw. die linear unabhängigen reellwertigen Lösungen $w_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \to \sin(t)$, $w_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \to \cos(t)$.

Damit ist $\mathcal{L} = \{c_1 w_1 + c_2 w_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \to c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ der Lösungsraum von x'' + x = 0 und mit einer Lösung μ : ℝ→ℝ von x'' + x = sin(at) ergibt sich der Lösungsraum $\mathcal{L}_a = \{\mu + c_1 w_1 + c_2 w_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \to \mu(t) + c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ von x'' + x = sin(at).

Für $\mu_{a,b}(t) := be^{iat}$ ist $\mu'_{a,b}(t) = iabe^{iat}$ und $\mu''_{a,b}(t) = (ia)^2 be^{iat} = -a^2 be^{iat}$, also $\mu''_{a,b}(t) + \mu_{a,b}(t) = (1 - a^2)be^{iat}$.

i) Für $a^2 \neq 1$ ist $b := \frac{1}{1-a^2} \in \mathbb{R}$, also $\mu''_{a,\frac{1}{1-a^2}}(t) + \mu_{a,\frac{1}{1-a^2}}(t) = e^{iat}$ und durch Bilden des Imaginärteils folgt $\mu_a = IM\left(\mu_{a,\frac{1}{1-a^2}}\right): \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \to \frac{1}{1-a^2} \sin(at)$ als eine Lösung von x'' + x = sin(at), d.h. der Lösungsraum ist gegeben durch $\mathcal{L}_a = \left\{\mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \to \frac{1}{1-a^2} \sin(at) + c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$; jede dieser Lösungen ist beschränkt.

ii) Für $a = \pm 1$ benötigen wir einen anderen Ansatz, nämlich $\lambda_b(t) := bt\, e^{it}$. Dieser liefert $\lambda'_b(t) = be^{it}(1 + it)$ und $\lambda''_b(t) = be^{it}(2i - t)$, also $\lambda''_b(t) + \lambda_b(t) = 2ibe^{it}$. Somit gilt: $\lambda_{\frac{1}{2i}}$ löst $x'' + x = e^{it}$, und durch Bilden des Imaginärteils bekommen wir $\lambda_1 := IM\left(\lambda_{\frac{1}{2i}}\right): \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \to IM\left(\frac{1}{2i} te^{it}\right) = -\frac{t}{2}\cos(t)$ als Lösung von x''+x=sin(t). Der Lösungsraum ist also $\mathcal{L}_1 = \left\{\mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \to -\frac{t}{2}\cos(t) + c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$ und alle hier enthaltenen Lösungen sind unbeschränkt.
Analog findet man $\lambda_{-1} := IM\left(\lambda_{\frac{1}{-2i}}\right): \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \to IM\left(\frac{1}{-2i} te^{-it}\right) = \frac{t}{2}\cos(t)$ als Lösung von x''+x=sin(-t). Der Lösungsraum ist also $\mathcal{L}_{-1} = \left\{\mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \to \frac{t}{2}\cos(t) + c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$ und alle hier enthaltenen Lösungen sind unbeschränkt.