Frühjahr 20 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sollen die komplexen Integrale $I_n := \int_{\gamma_n} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z$ benutzt werden, um zu zeigen, dass das uneigentliche Riemann-Integral $J := \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x$ existiert, und um dessen Wert zu bestimmen. Dabei setzt sich der geschlossene Weg γ_n für $n \in \mathbb{N}$ aus folgenden Teilwegen zusammen:

$$\begin{aligned}
\gamma_n^{(1)} &: [-\pi, 0] \to \mathbb{C}, & \gamma_n^{(1)}(t) &= e^{-it}/n,\\
\gamma_n^{(2)} &: [1/n, n] \to \mathbb{C}, & \gamma_n^{(2)}(t) &= t,\\
\gamma_n^{(3)} &: [0, n] \to \mathbb{C}, & \gamma_n^{(3)}(t) &= n + it,\\
\gamma_n^{(4)} &: [-n, n] \to \mathbb{C}, & \gamma_n^{(4)}(t) &= ni - t,\\
\gamma_n^{(5)} &: [0, n] \to \mathbb{C}, & \gamma_n^{(5)}(t) &= n(-1+i) - it,\\
\gamma_n^{(6)} &: [-n, -1/n] \to \mathbb{C}, & \gamma_n^{(6)}(t) &= t.
\end{aligned}$$

γ_n hat damit die Form eines Rechtecks mit einem Halbkreis um Null.

a) Zeichnen Sie das Bild eines Weges γ_n und zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $I_n = 0$.

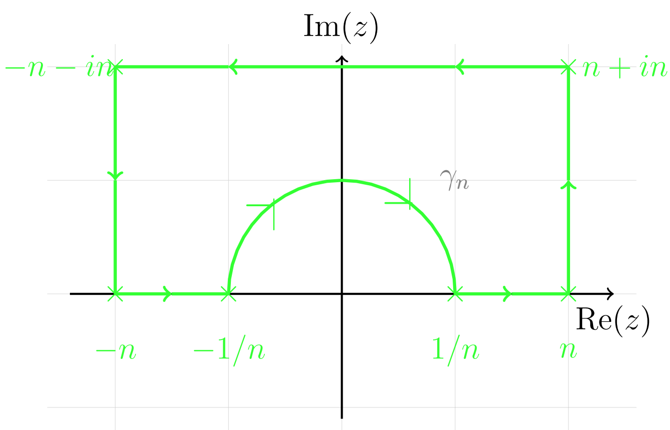
b) Berechnen Sie für $I_n^{(k)} := \int_{\gamma_n^{(k)}} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z$ jeweils den Limes

$$I^{(k)} := \lim_{n\to\infty} I_n^{(k)} \quad (\text{für } k = 1, 3, 4, 5) \text{ und daraus } \lim_{n\to\infty} (I_n^{(2)} + I_n^{(6)}).$$

c) Folgern Sie, dass das Integral J existiert und berechnen Sie seinen Wert.

Lösungsvorschlag:

a) Der Integrand ist eine auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ holomorphe Funktion als Verknüpfung solcher. Weil für alle $n \in \mathbb{N}$ der geschlossene Weg γ_n vollständig in der offenen, sternförmigen Menge $\mathbb{C}\setminus\{it : t \in (-\infty, 0]\}$ verläuft, auf welcher $\frac{e^{iz}}{z}$ holomorph ist, folgt $I_n = 0$ nach Cauchys Integralsatz.



Die Skizze ist nicht maßstabsgetreu. Für $n = 1$, fallen die Punkte $\pm n$ und $\pm 1/n$ außerdem zusammen.

b) Wir werden benutzen, dass bei gleichmäßiger Konvergenz auf kompakten Intervallen Integration und Grenzwertbildung vertauscht werden dürfen. Wir berechnen die Integrale mittels der Definition von Wegintegralen. Es gilt:

$$\int_{\gamma_n^{(1)}} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = \int_{-\pi}^{0} -\frac{\exp(ie^{-it}/n)}{e^{-it}/n} ie^{-it}/n\mathrm{d}t = -i\int_{-\pi}^{0} \exp(ie^{-it}/n)\mathrm{d}t,$$

wir behaupten, dass der Integrand gleichmäßig gegen die Einsfunktion konvergiert. Um das zu zeigen, benutzen wir die Stetigkeit der Exponentialfunktion, es gibt nämlich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft $|z| < \delta \implies |\exp(z) - 1| < \varepsilon$. Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig und ein geeignetes δ gewählt, wir zeigen, dass für n groß genug $|ie^{-it}/n| < \delta$ für alle $t \in [-\pi, 0]$ gilt. Für $n \geq N$ mit $N := \left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil + 1$ gilt nämlich $|ie^{-it}/n| = 1/n < \delta$, also ist für alle $t \in [-\pi,0]$ und $n \geq N$ auch $|\exp(ie^{-it}/n) - 1| < \varepsilon$ und die behauptete gleichmäßige Konvergenz gezeigt. Damit konvergiert das Integral für $n \to \infty$ gegen $-i\int_{-\pi}^{0} 1\mathrm{d}t = i\pi = I^{(1)}$.
Wir bestimmen das nächste Integral und substituieren $t = sn$ um

$$\int_{\gamma_n^{(3)}} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = \int_{0}^{n} \frac{e^{in-t}}{n+it} i\mathrm{d}t = \int_{0}^{1} \frac{e^{(i-s)n}}{n(1+is)} in\mathrm{d}s = i\int_{0}^{1} \frac{e^{in}e^{-sn}}{1+is}\mathrm{d}s$$

zu erhalten. Wir werden zeigen, dass der Integrand für alle $a > 0$ auf $[a,1]$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert, womit dann auch das Integral über $[a,1]$ gegen 0 konvergiert und wir schließlich $I^{(3)} = 0$ erhalten (s. u.). Es gilt nämlich für alle $s \in [a,1]$ die Ungleichung $|1 + is| = \sqrt{1 + s^2} \geq 1$ und daher $|\frac{e^{in}e^{-sn}}{1+is}| \leq e^{-sn} \leq e^{-an} \to 0$ für $n \to \infty$. Damit konvergiert der Integrand gleichmäßig und die Behauptung ist gezeigt.
Wir gehen wieder genauso vor und erhalten

$$\int_{\gamma_n^{(4)}} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = \int_{-n}^{n} -\frac{e^{-n-it}}{ni-t}\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1} \frac{e^{-n(1+is)}}{n(i-s)} n\mathrm{d}s = \int_{-1}^{1} \frac{e^{-n(1+is)}}{s-i}\mathrm{d}s$$

und schätzen wieder $|s - i| = \sqrt{s^2 + (-1)^2} \geq 1$ und $|e^{-n(1+is)}| = e^{-n} \to 0$ für alle $s \in [-1,1]$ ab. Also konvergiert auch dieser Integrand gleichmäßig gegen 0 und damit ist wieder $I^{(4)} = 0$.
Zuletzt berechnen wir wieder auf die gleiche Weise

$$\int_{\gamma_n^{(5)}} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z = \int_{0}^{n} -\frac{e^{t-n(1+i)}}{n(-1+i) - it} i\mathrm{d}t = i\int_{0}^{1} \frac{e^{n(s-1)-ni}}{n(1-i+is)} n\ \mathrm{d}s$$

und werden zeigen, dass für $b < 1$ der Integrand gleichmäßig auf $[0, b]$ gegen 0 konvergiert, damit geht dann auch das Integral über $[0, b]$ gegen 0 und daher ist $I^{(5)} = 0$ ebenso gezeigt (s. u.). Wir erhalten wieder $|1+(s-1)i| = \sqrt{1 + (s-1)^2} \geq 1$ und $|e^{n(s-1)-ni}| \leq e^{n(b-1)} \to 0$ für $n \to \infty$ und haben gleichmäßige Konvergenz gezeigt.
Wir wissen also $0 = I_n = \sum_{k=1}^{6} I_n^{(k)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und können dies zu $I_n^{(2)} + I_n^{(6)} = I_n - I_n^{(1)} - \sum_{k=3}^{5} I_n^{(k)}$ umformen. Grenzwertbildung zeigt nun $\lim\limits_{n\to\infty} (I_n^{(2)} + I_n^{(6)}) = i\pi$.
Wir zeigen nun abschließend, dass für die obigen Funktionenfolgen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, die für alle $a > 0$ auf $[a,1]$ beziehungsweise auf $[0, a]$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergieren auch das Integral $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \to 0$ konvergiert. Zunächst sehen wir, dass wir $\|f_n\|_\infty \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ abschätzen können, für $\varepsilon > 0$ erhalten wir nun

$$\left|\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^{\frac{\varepsilon}{3}} |f_n(x)|\mathrm{d}x + \int_{\frac{\varepsilon}{3}}^{1-\frac{\varepsilon}{3}} |f_n(x)|\mathrm{d}x + \int_{1-\frac{\varepsilon}{3}}^{1} |f_n(x)|\mathrm{d}x$$

und finden wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf $[a,1-a]$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für $n \geq N$ der mittlere Summand kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ ist. Damit lassen sich alle drei Summanden gegen $\dfrac{\varepsilon}{3}$ für $n \geq N$ abschätzen und die Aussage ist gezeigt.

c) Wir berechnen zunächst $I_n^{(2)} + I_n^{(6)}$ mittels der Definition. Wir erhalten

$$\int_{\gamma_n^{(2)}} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z + \int_{\gamma_n^{(6)}} \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{e^{it}}{t} \mathrm{d}t + \int_{-n}^{-\frac{1}{n}} \frac{e^{it}}{t} \mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{e^{it} - e^{-it}}{t} \mathrm{d}t = 2i \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t,$$

wobei wir im Integral über $[-n, -\frac{1}{n}]$ erst $s = -t$ substituiert haben und danach wieder t statt s notiert haben. Wir wissen, dass der linke Term gegen $i\pi$ konvergiert, nach Division durch $2i$ erhalten wir also $\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t \to \frac{\pi}{2}$ für $n \to \infty$. Solange das Integral J aber existiert, konvergiert der erste Term auch gegen J, womit wir $J = \frac{\pi}{2}$ erhalten. Wir müssen also nur noch zeigen, dass das betrachtete uneigentliche Riemann-Integral wirklich existiert. Weil $\frac{\sin(t)}{t}$ bei $t = 0$ stetig durch 1 fortgesetzt werden kann, ist das Integral nur an der oberen Grenze uneigentlich, wir müssen also nur noch beweisen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$ die Ungleichung $|\int_{b_n}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t| < \varepsilon$ gilt, denn dann existiert auch das Integral. Wir finden zunächst ein $K \in \mathbb{N}$ mit $|\int_{k}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq K$. Weil $b_n \to \infty$ gilt, finden wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N \implies b_n \geq K$. Außerdem finden wir ein $K' \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N' \implies \frac{1}{b_n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Für alle $n \geq \max\{N, N'\}$ gilt nun

$$\left| \int_{b_n}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t \right| \leq \int_{b_n}^{\lceil b_n \rceil} \frac{|\sin(t)|}{t} \mathrm{d}t + \left| \int_{\lceil b_n \rceil}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t \right| < \frac{1}{b_n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

wobei die Standardungleichung für Integrale und die Ungleichungen $|\sin(t)| \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $0 \leq \lceil b_n \rceil - b_n < 1$, sowie die Monotonie der Funktion $t \mapsto \frac{1}{t}$ benutzt wurden. Damit haben wir die Existenz des uneigentlichen Integrals gezeigt und wissen, dass wir den Wert berechnen können, indem wir irgendeine spezielle Folge b_n wählen. Mit $b_n = n$ folgt nun $J = \frac{\pi}{2}$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$