F20T3A1

Das Vektorfeld $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x_1, x_2) \to (\sin(x_2), -\sin(x_1))$ bestimmt die Differentialgleichung $x' = f(x)$.

a) Zeigen Sie: Für alle Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R}^2$ existiert eine eindeutige Lösung $\varphi_{x_0}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.
b) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte (Ruhelagen) in $\mathbb{R}^2$.
c) Zeigen sie, dass die Funktion $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x_1, x_2) \to \cos(x_1) + \cos(x_2)$ eine Erhaltungsgröße (Konstante der Bewegung) ist.
d) Welche Gleichgewichtspunkte sind Lyapunov-stabil, welche instabil? Benutzen Sie Teil c) zum Nachweis der Lyapunov-Stabilität.

Zu a)

Es ist f stetig differenzierbar und $\|f(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{|\sin(x_2)|, |-\sin(x_1)|\} \leq 1$. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz mit linear beschränkter rechter Seite hat das Anfangswertproblem $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = x_0 \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige, auf ganz $\mathbb{R}$ definierte maximale Lösung $\varphi_{x_0}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Zu b)

Die Ruhelagen sind genau die Nullstellen von f, also $(k\pi, l\pi)\ mit\ k, l \in \mathbb{Z}$.

Zu c)

H erfüllt $\langle (gradH)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} -\sin(x_1) \\ -\sin(x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin(x_2) \\ -\sin(x_1) \end{pmatrix} \rangle = 0\ für\ alle\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, deshalb ist H eine Erhaltungsgröße.

Zu d)

Die Jacobimatrix $(Jf)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos(x_2) \\ -\cos(x_1) & 0 \end{pmatrix}$ liefert $(Jf)\begin{pmatrix} k\pi \\ l\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^l \\ -(-1)^k & 0 \end{pmatrix}$ mit charakteristischem Polynom $z^2 + (-1)^{k+l} = \begin{cases} (z+1)(z-1)\ ; k + l\ ungerade \\ (z+i)(z-i)\ \ ; k + l\ gerade \end{cases}$.

Für ungerades k+l hat $(Jf)\begin{pmatrix} k\pi \\ l\pi \end{pmatrix}$ einen Eigenwert mit positivem Realteil, somit ist $\begin{pmatrix} k\pi \\ l\pi \end{pmatrix}$ eine instabile Ruhelage. Für gerades k+l haben beide Eigenwert Realteil 0, somit ist durch Linearisieren keine Stabilitätsaussage möglich.

$(gradH)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x_1) \\ -\sin(x_2) \end{pmatrix}$ hat ebenfalls die Nullstellen $(k\pi, l\pi)\ mit\ k, l \in \mathbb{Z}$; diese sind also die kritischen Punkte von H.

Es ist $(HessH)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(x_1) & 0 \\ 0 & -\cos(x_2) \end{pmatrix}$, also $(HessH)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-1)^k & 0 \\ 0 & -(-1)^l \end{pmatrix}$;

diese hat für gerades k+l den doppelten Eigenwert $\lambda = \begin{cases} 1 & ; k,l \; beide \; ungerade \\ -1; & k,l \; beide \; gerade \end{cases}$. In beiden Fällen hat die Erhaltungsgröße ein isoliertes lokales Extremum, daher ist $\begin{pmatrix} k\pi \\ l\pi \end{pmatrix}$ eine stabile Ruhelage.

Denn für k, l ungerade ist $V_{k,l}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to H\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - H\begin{pmatrix} k\pi \\ l\pi \end{pmatrix}$ eine Lyapunovfunktion für $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $V_{k,l}\begin{pmatrix} k\pi \\ l\pi \end{pmatrix} = 0$ und da $\begin{pmatrix} k\pi \\ l\pi \end{pmatrix}$ ein isoliertes lokales Minimum von H ist, gibt es eine Umgebung U von $\begin{pmatrix} k\pi \\ l\pi \end{pmatrix}$ sodass $V_{k,l}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} > V_{k,l}\begin{pmatrix} k\pi \\ l\pi \end{pmatrix} = 0 \; f\ddot{u}r \; alle \; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in U \backslash \left\{\begin{pmatrix} k\pi \\ l\pi \end{pmatrix}\right\}$ gilt. Laut VL ist dann $\begin{pmatrix} k\pi \\ l\pi \end{pmatrix}$ eine stabile Ruhelage.

Analog ist für k, l gerade ist $V_{k,l}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to -H\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + H\begin{pmatrix} k\pi \\ l\pi \end{pmatrix}$ eine Lyapunovfunktion für $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $V_{k,l}\begin{pmatrix} k\pi \\ l\pi \end{pmatrix} = 0$ und da $\begin{pmatrix} k\pi \\ l\pi \end{pmatrix}$ ein isoliertes lokales Maximum von H ist, gibt es eine Umgebung U von $\begin{pmatrix} k\pi \\ l\pi \end{pmatrix}$ sodass $V_{k,l}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} > V_{k,l}\begin{pmatrix} k\pi \\ l\pi \end{pmatrix} = 0 \; f\ddot{u}r \; alle \; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in U \backslash \left\{\begin{pmatrix} k\pi \\ l\pi \end{pmatrix}\right\}$ gilt. Laut VL ist dann $\begin{pmatrix} k\pi \\ l\pi \end{pmatrix}$ eine stabile Ruhelage.