F20T2A4

a) Sei $x_0 \in]0, \pi[$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$x' = \sin(x),\ x(0) = x_0$ (1)

eine eindeutig bestimmte globale Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.

b) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t)$ und $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ existieren und bestimmen Sie diese Grenzwerte.

c) Zeigen Sie, dass es ein $t^* \in \mathbb{R}$ gibt derart, dass x auf $]-\infty, t^*[$ strikt konvex und auf $]t^*, \infty[$ strikt konkav ist.

Zu a)

$sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; x \to \sin(x)$ ist stetig differenzierbar und $|\sin(x)| \leq 1\ f\ddot{u}r\ alle\ x \in \mathbb{R}$. Nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz mit linear beschränkter rechter Seite besitzt dann das Anfangswertproblem (1) eine eindeutig bestimmte, auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung.

Zu b)

Für die Anfangswertprobleme mit $x_0 = 0$ und $x_0 = \pi$ sind die beiden konstanten Lösungen $\lambda_0: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; t \to 0$ und $\lambda_0: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,; t \to \pi$ bereits die maximalen Lösungen, da sie auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Wegen $0 < x_0 < \pi$ sind die drei Graphen der maximalen Lösungen $\Gamma(\lambda_0) = \{(t, 0): t \in \mathbb{R}\}$, $\Gamma(\lambda_{x_0}) = \left\{\left(t, \lambda_{x_0}(t)\right): t \in \mathbb{R}\right\}\ und\ \Gamma(\lambda_\pi) = \{(t, \pi): t \in \mathbb{R}\}$ disjunkt, also $0 < \lambda_{x_0}(t) < \pi$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (denn sonst ergäbe der Zwischenwertsatz einen Schnittpunkt). Da λ_{x_0} eine Lösung von (1) ist, gilt $\lambda'_{x_0}(t) = \sin\left(\lambda_{x_0}(t)\right) > 0\ f\ddot{u}r\ alle\ 0 < \lambda_{x_0}(t) < \pi$, d.h. für alle $t \in \mathbb{R}$; d.h. λ_{x_0} ist streng monoton steigend. Als streng monoton steigende, bschränkte Funktion existiert dann $a := \inf\{\lambda_{x_0}(t): t \in \mathbb{R}\} = \lim\limits_{t\to-\infty} x(t)$ und $b := \sup\{\lambda_{x_0}(t): t \in \mathbb{R}\} = \lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ mit $a, b \in [0, \pi]$.

Angenommen $b < \pi$. Dann ist $\lambda'_{x_0}(t) = \sin\left(\lambda_{x_0}(t)\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} \sin(b) > 0$. Nach Definition des Grenzwerts gibt es $N > 0$ mit $\lambda'_{x_0}(t) > \frac{1}{2}\sin(b)\ \ f\ddot{u}r\ alle\ t \geq N$ imd daher ist $\lambda_{x_0}(t) = x_0 + \int_0^t \lambda'_{x_0}(s)ds \geq x_0 + \int_0^N \lambda'_{x_0}(s)ds + \int_N^t \frac{1}{2}\sin(b)\,ds =$ ist $\lambda_{x_0}(N) + \frac{1}{2}\sin(b)(t - N)$ nach oben unbeschränkt im Widerspruch zu ist $\lambda_{x_0}(t) \in\ ]0, \pi[\ f\ddot{u}r\ alle\ t \in \mathbb{R}$. Somit gilt $b = \pi$.

Analog zeigt man $a = 0$.

Zu c)

Lt. VL gilt: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f': I \to \mathbb{R}$ streng monoton steigend (bzw. fallend), so ist f strikt konvex (bzw. konkav).

Es ist $\lambda'_{x_0}(t) = \sin\left(\lambda_{x_0}(t)\right)\begin{cases}\text{streng monoton steigend für } \lambda_{x_0}(t) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ \text{streng monoton fallend für } \lambda_{x_0}(t) \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\end{cases}$. Da λ_{x_0} nach (b) streng monoton steigend ist, gibt es genau ein $t^* \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_{x_0}(t) \begin{cases} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& f\ddot{u}r\ t < t^* \\ = \frac{\pi}{2} & f\ddot{u}r\ t = t^* \\ \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[& f\ddot{u}t\ t > t^* \end{cases}$. Damit ist

$\lambda_{x_0}|_{]-\infty,t^*[}$ strikt konvex und $\lambda_{x_0}|_{]-\infty,t^*[}$ strikt konkav.