Frühjahr 20 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben seien die Funktion $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0{,}0)\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \frac{x}{x^2+y^2}$ und die Menge $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + 2y^2 \leq 4\}$.

a) Zeigen Sie, dass f Realteil einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist. Dabei werde $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ identifiziert.

b) Zeigen Sie, dass f auf der Menge M Maximum und Minimum annimmt. Bestimmen Sie alle Stellen, an denen dies geschieht, und berechnen Sie die entsprechenden Funktionswerte.

Lösungsvorschlag:

a) Man kann die Funktion $g : \mathbb{R}^2\backslash\{(0{,}0)\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto -\frac{y}{x^2+y^2}$ betrachten und die Cauchy Riemann Differentialgleichungen nachrechnen oder die holomorphe Funktion $h : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z}$ betrachten, denn für $z = x + iy$ gilt $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = f(x,y) + ig(x,y)$, woraus die Aussage folgt.

b) Als Verknüpfung stetiger Funktionen ist f auf dem gesamten Definitionsgebiet stetig. Die Menge M ist nicht leer, denn sie enthält den Punkt (0,1) und ist kompakt, denn sie ist das Urbild des abgeschlossenen Intervalls [1,4] unter der stetigen Funktion $j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ j(x,y) = x^2 + 2y^2$, also abgeschlossen. Außerdem gilt für $(x,y) \in M$ auch $x^2 + y^2 \leq x^2 + 2y^2 \leq 4$, also folgt nach Wurzelziehen mit der Monotonie der Wurzelfunktion auch $\|(x,y)\|_2 \leq 2$, d. h. M ist beschränkt durch 2. Als abgeschlossene, beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist M kompakt. Die Funktion f nimmt nun nach dem Satz von Minimum und Maximum ihr Minimum und ihr Maximum auf der Menge M an.
Wir bestimmen jetzt die Extrema, dafür betrachten wir zunächst das Innere von M, also die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+2y^2 < 4\}$. Jede Extremalstelle in diesem Gebiet muss eine Nullstelle des Gradienten sein. Es ist $\nabla f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}(-x^2, -2xy)^{\mathrm{T}}$ für alle $(x,y) \in M$, was genau dann verschwindet, wenn $x = 0$ ist. Jeder Punkt in M mit $x = 0$ ist aber weder global maximal noch minimal, weil der Funktionswert für diese Punkte ebenfalls 0 ist, f auf M aber sowohl negative als auch positive Werte annimmt (betrachte $(-1{,}0)$ und $(1{,}0)$). Also gibt es keine Extrema im Inneren. Wir betrachten noch die Randfälle, also die Mengen $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$ und $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 4\}$. In beiden Fällen können wir nach y^2 auflösen und erhalten $y^2 = \frac{1-x^2}{2}$ beziehungsweise $y^2 = \frac{4-x^2}{2}$. Das setzen wir in f ein und erhalten so Funktionen, die nur noch von x abhängen. Diese betrachten wir für $x \in [-2{,}2]$, denn für $(x,y) \in M$ gilt $x^2 \leq x^2 + 2y^2 \leq 4$, also $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{4} = 2$.
Im ersten Fall erhalten wir nach Erweiterung mit 2 die Funktion $k_1(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ und im zweiten Fall ebenso $k_2(x) = \dfrac{2x}{4+x^2}$. Beide sind stetig auf dem kompakten Intervall $[-2{,}2]$, nehmen dort also ihre Extrema an. Für die Ableitungen erhalten wir $k_1'(x) = \dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$, was genau für $x = \pm 1$ verschwindet und $k_2'(x) = \dfrac{8-2x^2}{(4+x^2)^2}$,

was genau für $x = \pm 2$ verschwindet. Für das Vorzeichen erhalten wir, dass k_1' positiv auf $(-1{,}1)$ und negativ auf $[-2,-1)$ und $(1{,}2]$ ist und k_2' auf $(-2{,}2)$ positiv ist. Damit ist $x = -1$ lokales Minimum für k_1 und $x = 1$ lokales Maximum für k_1; außerdem ist k_2 streng monoton wachsend und hat folglich bei $x = -2$ ein globales Minimum und bei $x = 2$ ein globales Maximum. Es gilt $k_2(-2) = -\frac{1}{2}$ und $k_2(2) = \frac{1}{2}$. Außerdem ist $k_1(-2) = -\frac{4}{5}, k_1(-1) = -1, k_1(1) = 1$ und $k_1(2) = \frac{4}{5}$, also sind die zuvor berechneten lokalen Extrema von k_1 auch die globalen Extrema.
f muss auf M globales Maximum und Minimum besitzen, im Inneren können diese nicht angenommen werden, weil alle stationären Punkte keine Extrema sind. Die Extrema müssen also auf dem Rand angenommen werden und sind insbesondere extremal für $f|_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+2y^2=1\}}$ und $f|_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+2y^2=4\}}$. Im ersten Fall erhalten wir $x = \pm 1$ und wegen $x^2+2y^2 = 1$, dann $y = 0$; im zweiten Fall erhalten wir $x = \pm 2$ und wieder mit dem gleichen Argument $y = 0$. Die Extrema müssen also in der Menge $\{(-1{,}0), (1{,}0), (-2{,}0), (2{,}0)\}$ angenommen werden. Die zugehörigen Funktionswerte sind $-1, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. Der größte davon ist 1, welcher genau im Punkt $(1{,}0)$ angenommen wird und der kleinste ist -1, welcher genau im Punkt $(-1{,}0)$ angenommen wird.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$