Frühjahr 20 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Zu gegebenem $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ mit $|a| = 1$ sei $\gamma_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \mapsto t\,a$. Für $R > 1$ sei $\gamma_{a,R} := \gamma_a|_{[-R,R]}$ die Einschränkung von γ_a auf das Intervall $[-R, R]$.

a) Zeigen Sie, dass das komplexe Wegintegral

$$\int_{\gamma_a} \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2} := \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{a,R}} \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2}$$

existiert, und bestimmen Sie seinen Wert.

b) Sei nun $\gamma_a^+ := \gamma_a|_{[0,\infty)}$. Existiert das Integral $\int_{\gamma_a^+} \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2}$, wenn man dieses analog zu (a) als Limes interpretiert? Bestimmen Sie gegebenfalls den Wert des Integrals.

Lösungsvorschlag:

a) Wir bestimmen zunächst die Integrale über $\gamma_{a,R}$ mit dem Residuensatz. Dafür erweitern wir den Weg $\gamma_{a,R}$ zu einem geschlossenen Pfad, indem wir in positivem Sinn die Kreislinie des Kreises mit Mittelpunkt 0 und Radius R von Ra bis $-Ra$ durchlaufen, d. h. wir nehmen die Kurve $\Gamma_{a,R} : [0, \pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto Re^{it}a$ zu $\gamma_{a,R}$ hinzu und erhalten die neue geschlossene Kurve $\gamma_{a,R} + \Gamma_{a,R} := \tau_{a,R}$. Diese ist stückweise stetig differenzierbar und verläuft nicht durch ± 1. Die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{-1{,}1\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \dfrac{1}{1-z^2}$ ist holomorph, hat also nur endlich viele Singularitäten und die Menge $\mathbb{C}$ ist offen und konvex. Beide Singularitäten sind Pole erster Ordnung, da der Nenner dort eine einfache Nullstelle hat und der Zähler nicht verschwindet. Wir können nun den Residuensatz anwenden, für jedes $R > 1$ umkreist $\tau_{a,R}$ nur eine der Singularitäten und zwar in positivem Umlaufsinn. Ist $\operatorname{Im}(a) > 0$, so wird -1 umschlossen; ist $\operatorname{Im}(a) < 0$, so wird 1 umschlossen. Der Imaginärteil ist nach Voraussetzung nicht 0. Wir bestimmen also die Residuen der Singularitäten. Es gilt $\operatorname{Res}_f(1) = \lim\limits_{z\to 1} f(z)(z-1) = \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{-1}{z+1} = -\dfrac{1}{2}$ und $\operatorname{Res}_f(-1) = \lim\limits_{z\to -1} f(z)(z+1) = \lim\limits_{z\to -1} \dfrac{1}{1-z} = \dfrac{1}{2}$.
Nach dem Residuensatz gilt nun $\int_{\tau_{a,R}} \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_f(1) = -\pi i$, falls $\operatorname{Im}(a) < 0$ ist und $\int_{\tau_{a,R}} \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_f(-1) = \pi i$, falls $\operatorname{Im}(a) > 0$ ist.
Wir schätzen den Fehler durch die Hinzunahme des Halbkreisbogens ab. Es gilt

$$0 \le \left| \int_{\Gamma_{a,R}} \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2} \right| \le |\Gamma_{a,R}| \max_{z\in \operatorname{Spur}(\Gamma_{a,R})} |f(z)| \le \frac{\pi R}{R^2-1} \to 0,$$

für $R \to \infty$, wobei im Nenner die umgekehrte Dreiecksungleichung verwendet wurde und dass $\Gamma_{a,R}$ einen Halbkreisbogen parametrisiert (Länge πR) und jeder Punkt in der Spur einen Betrag von R hat.
Damit gilt nun

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{a,R}} \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{\tau_{a,R}} \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2} - \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_{a,R}} \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2} = \begin{cases} \pi i & \text{falls } \operatorname{Im}(a) > 0, \\ -\pi i & \text{falls } \operatorname{Im}(a) < 0. \end{cases}$$

b) Wir betrachten zusätzlich $\gamma_a^- := \gamma_a|_{(-\infty,0]}$ und völlig analog zu (a) die Einschränkungen auf $[0, R]$ und $[-R,0]$. Es gilt:

$$\int_{\gamma_{a,R}^+} \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2} = \int_0^R \frac{a}{1-t^2a^2}\mathrm{d}t = -\int_{-0}^{-R} \frac{a}{1-(-t)^2a^2}\mathrm{d}t = \int_{-R}^0 \frac{a}{1-t^2a^2}\mathrm{d}t = \int_{\gamma_{a,R}^-} \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2}$$

für alle a und $R > 1$. Demnach ist wegen $\gamma_{a,R} = \gamma_{a,R}^+ + \gamma_{a,R}^-$ auch

$$\int_{\gamma_{a,R}} \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2} = \int_{\gamma_{a,R}^+} \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2} + \int_{\gamma_{a,R}^-} \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2} = 2\int_{\gamma_{a,R}^+} \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2}.$$

Daher existiert auch dieses Integral und hat genau den halben Wert des zuvor berechneten Integrals, also

$$\int_{\gamma_a^+} \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2} = \begin{cases} \frac{\pi i}{2} & \text{falls } \mathrm{Im}(a) > 0, \\ -\frac{\pi i}{2} & \text{falls } \mathrm{Im}(a) < 0. \end{cases}$$

J.F.B.