F20T2A1

Gegeben seien zwei reelle Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Weiter sei b ∈ $\mathbb{R}$.

a) Sei $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition für die Konvergenz einer reellen Zahlenfolge, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.
b) Es sei $(\sum_{k=1}^n a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Zeigen Sie, dass die Reihe $(\sum_{k=1}^n a_k b_k)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls absolut konvergiert.
c) Sei nun $(\sum_{k=1}^n a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass dann die Reihe $(\sum_{k=1}^n a_k b_k)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergiert.

Zu a)

Ist $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, so gibt es für alle $\varepsilon > 0\ ein\ N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ mit |b - b_n| < \varepsilon\ für\ alle\ n > N_\varepsilon$. Da die beiden Mengen] b-ε; b+ε [und $\{b_1, \dots, b_{N_\varepsilon}\}$ beschränkt sind ist auch die Menge $\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq ([\mathrm{b} - \varepsilon; \mathrm{b} + \varepsilon] \cup \{b_1, \dots, b_{N_\varepsilon}\})$ beschränkt.

Zu b)

Ist $(\sum_{k=1}^n a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, dann gibt es nach (a) ein $c < \infty$ mit $\sup\{|b_n| : n \in \mathbb{N}\} \leq c$. Dann ist $|a_k b_k| \leq |a_k| c$. Also gibt $(|a_k| c)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Majorante zu $(a_k b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und da $(\sum_{k=1}^n a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut konvergiert, konvergiert auch $(\sum_{k=1}^n |a_k| c)_{n\in\mathbb{N}}$ und somit ist laut Majorantenkriterium $(\sum_{k=1}^n a_k b_k)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut konvergent.

Zu c)

Widerlegung mit Gegenbeispiel: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ und $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend; nach dem Leibnizkriterium konvergiert somit die Reihe $(\sum_{k=1}^n a_k)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aber die Reihe $(\sum_{k=1}^n a_k b_k)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{\sqrt{n}} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht.

(Anm.: unter den absolut konvergenten Reihen lässt sich KEIN Gegenbeispiel finden)