(F20T1A5)

Sei $G: [0,1]^2 \to \mathbb{R}\,; (x,y) \to \begin{cases} y(x-1) & \text{für } y \leq x \\ x(y-1) & \text{für } y > x \end{cases}.$

a) Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass die Funktion $u: [0,1] \to \mathbb{R}\,; x \to \int_0^1 G(x,y)f(y)\,dy$ zweimal stetig differenzierbar ist mit u''(x) = f(x) für x ∈ [0, 1], u(0) = u(1) = 0.
b) Zeigen Sie, dass durch
$u_0(x) := 0,\ u_{n+1}(x) := \int_0^1 G(x,y)\cos\big(u_n(y)\big)\,dy$ *für* $x \in [0,1], n \in \mathbb{N}_0$ eine Folge stetiger Funktionen $(u_n: [0,1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert wird, die gleichmäßig gegen eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u: [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert mit
$u''(x) = \cos\big(u(x)\big)$ *für* $x \in [0;1], u(0) = u(1) = 0.$

Zu a)

Es ist $u(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y)\,dy = \int_0^x y(x-1)f(y)\,dy + \int_x^1 x(y-1)f(y)\,dy = (x-1)\int_0^x yf(y)\,dy + x\int_x^1 (y-1)f(y)\,dy,$

deshalb existiert u(x) als Integral einer stetigen Funktion über ein kompaktes Intervall. Nach Kettenregel und Hauptsatz der Differential- und Integralrechung ist u differenzierbar mit $u'(x) = \int_0^x yf(y)\,dy + (x-1)xf(x) + \int_x^1 (y-1)f(y)\,dy - (x-1)xf(x) = \int_0^x yf(y)\,dy + \int_x^1 (y-1)f(y)\,dy = \int_0^1 yf(y)\,dy - \int_x^1 f(y)\,dy = \int_0^1 yf(y)\,dy + \int_1^x f(y)\,dy.$

Da $\int_0^1 yf(y)\,dy$ nicht von x abhängt, ist u' laut Hauptsatz de Differential- und Integralrechnung differenzierbar mit $u''(x) = f(x)$ stetig; somit ist u zweimal stetig differenzierbar und es gilt: $u(0) = -\int_0^0 yf(y)\,dy + 0\int_0^1 (y-1)f(y)\,dy = 0 = 0\int_0^1 yf(y)\,dy + \int_1^1 (y-1)f(y)\,dy = u(1).$

Zu b)

Für alle $x \in [0;1]$ gilt: $\int_0^1 |G(x,y)|dy = \int_0^x |y(x-1)|\,dy + \int_x^1 |x(y-1)|\,dy = (1-x)\int_0^x y\,dy + x\int_x^1 (1-y)\,dy = (1-x)\left(\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x\right) + x\left(\left[y-\frac{y^2}{2}\right]_x^1\right) = \cdots = \frac{1}{2}x(1-x)$, also

$\sup\left\{\int_0^1 |G(x,y)|dy :\ x \in [0;1]\right\} = \sup\left\{\frac{1}{2}x(1-x) :\ x \in [0;1]\right\} = \frac{1}{8}.$ (1)

Damit ist $u_0(x) - u_1(x) = 0 - \int_0^1 G(x,y)\cos(0)\,dy = -\int_0^1 G(x,y)\,dy$, also ist

$\sup\{|u_0(x) - u_1(x)| :\ x \in [0;1]\} \leq \sup\left\{\left|-\int_0^1 G(x,y)dy\right| :\ x \in [0;1]\right\} \leq \sup\left\{\int_0^1 |G(x,y)|dy :\ x \in [0;1]\right\} = \frac{1}{8}.$ (2)

$|u_1(x) - u_2(x)| = \left|\int_0^1 G(x,y)\cos\big(u_0(x)\big)\,dy - \int_0^1 G(x,y)\cos\big(u_1(y)\big)\,dy\right| = \left|\int_0^1 G(x,y)\big(\cos\big(u_0(x)\big) - \cos\big(u_1(y)\big)\big)\,dy\right| \leq \int_0^1 |G(x,y)|\big|\cos\big(u_0(x)\big) - \cos\big(u_1(y)\big)\big|\,dy \leq$

$(*[1]) \leq \int_0^1 |G(x,y)||u_0(x) - u_1(y)|\, dy$, also ist $\sup\{|u_1(x) - u_2(x)| : x \in [0;1]\} \leq \sup\left\{\int_0^1 |G(x,y)||u_0(x) - u_1(y)|\, dy : x \in [0;1]\right\} \leq (2) \leq \sup\left\{\int_0^1 |G(x,y)| \frac{1}{8}\, dy : x \in [0;1]\right\} = (1) = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$. Dieses ist der Induktionsanfang für den Beweis der folgenden Behauptung:

$\sup\{|u_{k-1}(x) - u_k(x)| : x \in [0;1]\} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Der Induktionsschritt $k \rightarrow k+1$ ist: $\sup\{|u_k(x) - u_{k+1}(x)| : x \in [0;1]\} = \sup\left\{\left|\int_0^1 G(x,y)\big(\cos(u_k(x)) - \cos(u_{k+1}(y))\big)\, dy\right| : x \in [0;1]\right\} \leq \sup\left\{\int_0^1 |G(x,y)||u_k(x) - u_{k+1}(x)|\, dy : x \in [0;1]\right\} \leq (IV) \leq \sup\left\{\int_0^1 |G(x,y)| \left(\frac{1}{8}\right)^k dy : x \in [0;1]\right\} \leq \sup\left\{\left(\frac{1}{8}\right)^k \int_0^1 |G(x,y)| dy : x \in [0;1]\right\} \leq (1) \leq \sup\left\{\left(\frac{1}{8}\right)^k \frac{1}{8} : x \in [0;1]\right\} = \left(\frac{1}{8}\right)^{k+1}$.

Damit gilt für $k, l \in \mathbb{N}$, $k < l$: $\sup\{|u_k(x) - u_l(x)| : x \in [0;1]\} \leq \sum_{j=k}^{l-1} \sup\{|u_j(x) - u_{j+1}(x)| : x \in [0;1]\} \leq \sum_{j=k}^{l-1} \left(\frac{1}{8}\right)^j = \frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{l+1}}{1-\frac{1}{8}} - \frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{7}\left(\left(\frac{1}{8}\right)^{k+1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{l+1}\right) = \frac{8}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^{k+1}\left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{l-k}\right) \xrightarrow[k,l\to\infty]{} 0$ und deshalb konvergiert die Funktionenfolge $(u_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichmäßig auf [0;1]. Damit ist laut VL der Grenzwert $u: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Laut Rekursionsgleichung gilt $u_{k+1}(x) := \int_0^1 G(x,y)\cos\big(u_k(y)\big)\, dy$ mit $u_{k+1}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} u(x)$ und $u_k(y) \xrightarrow[k\to\infty]{} u(y)$. Da $\big|\cos\big(u_k(y)\big)\big| \leq 1$ und $|G(x,y)| \leq 1$ für alle $x, y \in [0;1]$ gilt, gibt es eine integrierbare Majorante, also folgt aus der punktweisen Konvergenz des Integranden $\int_0^1 G(x,y)\cos\big(u_k(y)\big)\, dy \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_0^1 G(x,y)\cos\big(u(y)\big)\, dy$. Deshalb löst die stetige Funktion $u: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ die Integralgleichung $u(x) = \int_0^1 G(x,y)\cos\big(u(y)\big)\, dy$. Mit $f: [0;1] \rightarrow \mathbb{R}\,; y \rightarrow \cos\big(u(y)\big)$ folgt aus (a), dass u zweimal stetig differenzierbar ist, dass $u(0) = u(1) = 0$ und dass $u''(x) = \cos\big(u(x)\big)$ $für$ $x \in [0;1]$.

---

[1] $Für$ $v, w \in \mathbb{R}, v < w$ gibt es laut Mittelwertsatz ein $\xi \in [v,w]$ mit $\frac{\cos(v)-\cos(w)}{v-w} = \cos'(\xi) = \sin(\xi)$, also ist $|\cos(v) - \cos(w)| \leq |v - w|$.