Aufgabenstellung und Lösung

Es ist die folgende Aufgabe zu lösen:

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten) für die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die durch

$$f(z) := z^{42} - 5z^4 + \mathrm{i}z^3 + z^2 - \mathrm{i}z \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

gegeben ist im offenen Einheitskreis $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\, \mathrm{d}x$.

Lösungsvorschlag: Teilaufgabe (a): Es handelt sich hierbei um eine für den Satz von Rouché typische Aufgabenstellung. Das Polynom f ist ganz (und $\mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{C}$) und weiter gilt mit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) := -5z^4$

$$|g(z) - f(z)| = |-z^{42} - \mathrm{i}z^3 - z^2 + \mathrm{i}z| \leq |z^{42}| + |\mathrm{i}z^3| + |z^2| + |\mathrm{i}z| = 4 < 5 = |g(z)|$$

für $z \in \partial B_1(0)$, wobei wir die Dreiecksungleichung verwendet haben. Nach dem Satz von Rouché haben f und g in $B_1(0)$ mit Vielfachheit gezählt dieselbe Nullstellenanzahl. Da g offensichtlich vier Nullstellen im untersuchten Bereich hat, hat f dort auch vier. Man kann natürlich auch eine andere Version dieses Satzes verwenden.

Teilaufgabe (b): Wir definieren die Hilfsfunktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := \dfrac{1+z^2}{1+z^4}$. Offenbar ist f meromorph und hat als isolierte Singularitäten z_n die Nullstellen des Nenners. Diese sind die vierten Wurzeln von -1, also der Form

$$z_k = \exp\left(\frac{\pi\mathrm{i} + 2\pi\mathrm{i}k}{4}\right) \quad \text{für } k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Diese sind keine Nullstellen des Zählers und daher Pole erster Ordnung. Weiter gilt, dass nur z_1 und z_2 positive Imaginärteile haben und keine Singularität rein reell ist. Da außerdem $\lim\limits_{|z| \to \infty} z \cdot f(z) = 0$ ist, kann man den Wert des reellen Integrals mithilfe der bekannten Formel zur Berechnung reeller Integrale mit dem Residuensatz bestimmen. Wir bestimmen die benötigten Residuen, sie sind

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}(f(z)) = \frac{1+\exp(\frac{\pi \mathrm{i}}{2})}{4\exp(\frac{3\pi\mathrm{i}}{4})} = \frac{1+\mathrm{i}}{\frac{4\mathrm{i}-4}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}}{4\mathrm{i}-4} = -\frac{8\sqrt{2}\mathrm{i}}{32} = -\frac{\sqrt{2}\mathrm{i}}{4}$$

und

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1}(f(z)) = \frac{1+\exp(\frac{6\pi \mathrm{i}}{4})}{4\exp(\frac{9\pi\mathrm{i}}{4})} = \frac{1-\mathrm{i}}{\frac{4+4\mathrm{i}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}}{4+4\mathrm{i}} = -\frac{8\sqrt{2}\mathrm{i}}{32} = -\frac{\sqrt{2}\mathrm{i}}{4}$$

Es ergibt sich damit schließlich mit dem Residuensatz zur Berechnung reeller Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\cdot\left(\operatorname*{Res}_{z=z_0}(f(z)) + \operatorname*{Res}_{z=z_1}(f(z))\right) = -\frac{2\pi\mathrm{i}\cdot 2\sqrt{2}\mathrm{i}}{4} = \sqrt{2}\pi$$

als Wert des reellen Integrals.

Hinweis: Falls man diesen Satz nicht kennt, kann man auch das komplexe geschlossene Kurvenintegral entlang eines Halbkreises plus Verbindungskurve von Anfangs- und Endpunkt des Halbkreises in der oberen komplexen Halbebene betrachten.
Für dieses gilt der *normale* Residuensatz und man kann es in zwei Teilintegrale aufspalten: Ein Integral über ein reelles Intervall von $-R$ bis R und eines über die Kurve $[0,\pi] \ni t \mapsto R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Das Kurvenintegral entlang des halbkreisförmigen Hilfswegs kann leicht mit der Standardabschätzung im Fall, dass der Radius R gegen ∞ geht, gegen 0 abgeschätzt werden. Übrig bleibt dann das gesuchte reelle Integral.