F20T1A3≠≠

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichung zweiter Ordnung:
$x'' - x = e^t$ (1)

b) Die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind gegeben durch $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$ und $\varphi_3(t) = t^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
Über eine lineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung ist bekannt, dass φ_1, φ_2, φ_3 Lösungen sind. Geben Sie die Menge aller Lösungen dieser Differentialgleichung an. Die Differentialgleichung selbst brauchen Sie dabei nicht zu bestimmen.

Zu a)

$x'' - x = e^t$ ist inhomogene lineare DGL zweiter Ordnung, hat also als Lösungsraum einen zweidimensionalen affinen Unterraum von $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Die homogene lineare DGL $x'' - x = 0$ hat das charakteristische Polynom $z^2-1 = (z+1)(z-1)$, also bilden $\lambda_1: \mathbb{R}\to\mathbb{R}; t\to e^t$ und $\lambda_2: \mathbb{R}\to\mathbb{R}; t\to e^{-t}$ ein Fundamentalsystem, d.h. eine Basis des homogenen Lösungsraums.

Mit $(te^t)' = e^t(t+1)$ und $(te^t)'' = e^t(t+2)$ gilt $(te^t)''+te^t = 2e^t$, also ist $\mu: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \to \frac{1}{2}te^t$ eine Lösung von (1). $\mathcal{L} := \left\{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \to \frac{1}{2}te^t + c_1e^t + c_2e^{-t} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$ ist also der Lösungsraum von (1).

Alternative Lösung über die Fundamentalmatrix des äquivalenten Systems.

Zu b)

Sind $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ Lösungen einer inhomogenen DGL, so sind die Differenzen $\varphi_2-\varphi_1$, $\varphi_3-\varphi_1$, $\varphi_3-\varphi_2$ Lösungen der zugehörigen homogenen DGL, die einen zweidimensionalen Untervektorraum von $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ als Lösungsraum besitzt. $\lambda_1(\varphi_3-\varphi_2)+\lambda_2(\varphi_3-\varphi_1) = \lambda_1(t^2-t)+\lambda_2(t^2-1) = 0$ hat für $(\lambda_1,\lambda_2)\neq(0,0)$ als Polynom vom Grad ≤ 2 höchstens zwei Nullstellen, daher sind $\varphi_3-\varphi_2$ und $\varphi_3-\varphi_1$ linear unabhängig, daher ist $\operatorname{lin}\{\varphi_3-\varphi_2, \varphi_3-\varphi_1\}$ der Lösungsraum der homogenen linearen DGL und da z.B. φ_1 eine Lösung der inhomogenen linearen DGL ist, gibt $\varphi_1 + \operatorname{lin}\{\varphi_3-\varphi_2, \varphi_3-\varphi_1\} = \{\varphi_1+c_1(\varphi_3-\varphi_2)+c_2(\varphi_3-\varphi_1) : c_1,c_2 \in \mathbb{R}\} = \{(c_1+c_2)t^2+c_1t+c_2+1 : c_1,c_2 \in \mathbb{R}\}$ den Lösungsraum der inhomogenen DGL.