F20T1A2

Gegeben sei das autonome Differentialgleichungssystem

$\dot{x} = 2 - xy^2$

$\dot{y} = (x-2)y$

a) Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems.
b) Untersuchen Sie alle Ruhelagen auf asymptotische Stabilität.
c) Sei J ⊆ R das maximale Existenzintervall der eindeutigen Lösung mit Anfangswert (x(0), y(0)) ∈ ℝ ×]0, ∞[. Begründen Sie, dass y(t) > 0 für alle t ∈ J gilt.

Zu a)

Ruhelagen sind die Nullstellen von $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \binom{x}{y} \to \binom{2-xy^2}{(x-2)y}$.

Da $(x-2)y = 0 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ } oder \text{ } y = 0)$, erhalten wir

i) Durch Einsetzen von x=2 in 2-xy² = 0:
$0 = 2 - 2y^2 = 2(1-y^2)$, also $y = \pm 1$ und somit die Ruhelagen (2,1) und (2,-1)

ii) Durch Einsetzen von y=0 in 2-xy² = 0 keine Lösung.

Zu b)

$(Jf)\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} -y^2 & -2xy \\ y & x-2 \end{pmatrix}$ ist die Jacobimatrix zu f, also

$(Jf)\binom{2}{1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat als charakteristisches Polynom $\det\begin{pmatrix} -1-z & -4 \\ 1 & 0-z \end{pmatrix} = z^2 + z + 4$ mit den Nullstellen $z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4*4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2}$, d.h. die Realteile aller Eigenwerte von $(Jf)\binom{2}{1}$ sind $-\frac{1}{2} < 0$, also ist $\binom{2}{1}$ eine asymptotisch stabile Ruhelage.

$(Jf)\binom{2}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ hat dasselbe charakteristische Polynom, also dieselben Eigenwerte wie $(Jf)\binom{2}{1}$, somit ist auch $\binom{2}{-1}$ eine asymptotisch stabile Ruhelage.

Zu c)

Da f stetig differenzierbar ist, erfüllt die autonome Differenzialgleichung $\binom{x'}{y'} = f(x,y)$ alle Voraussetzungen des globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes; insbesondere sind auch die Trajektorien paarweise disjunkt. Für den Startwert y(τ) = 0 ist (bei beliebigem x) $\lambda_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ t \to 0$ eine Lösung von $\dot{y} = (x-2)y;\quad y(\tau) = 0$. Setzt man $\lambda_2$ in $\dot{x} = 2 - xy^2$ ein, so erhalten wir $\dot{x} = 2$, $x(\tau) = c$, also $\lambda_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ t \to c + 2(t - \tau)$ als Lösung und daher $\{(t,0) : t \in \mathbb{R}\}$ als Trajektorie zu diesen Lösungen. Da sich Trajektorien nicht schneiden können und $\{(t,0) : t \in \mathbb{R}\}$ Trajektorie ist, verbleibt jede Trajektorie, die in ℝ ×]0, ∞[ startet auch in ℝ ×]0, ∞[. (Denn sonst hat man nach Zwischenwertsatz einen Schnitt mit $\{(t,0) : t \in \mathbb{R}\}$.)