F20T1A1

Donnerstag, 27. April 2023 14:19

F20 T1 A1

Aufgabe 1:

(2 + 4 Punkte) Gegeben seien das Ellipsoid

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 9\}$$

und die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) := x + 4y - 2z + 9 \quad \text{für } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Begründen Sie, dass die Funktion f auf E ihr Maximum und Minimum annimmt.

b) Bestimmen Sie die Maximum- und Minimumstellen von f auf E.

→ Menge abgeschlossen, stetig

Beschränktheit: $x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 9$

$|x| \leq 9$ oder 3

$|y| \leq 9$ oder 3

$|z| \leq 9$ oder 3

} kompakt

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(x, y, z) \mapsto x + 4y - 2z + 9$ stetig

a) Satz von Weierstraß

f stetig, E kompakt $\to$ $f|_E$ hat glob. Max. & glob. Min.

b) ① Suche krit. Stellen von E

notw. Bedingung: $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \neq 0 \to$ d.h. f hat keine krit. Stellen.

② Untersuche $f|_{\partial E}$ Rand von E

$$\partial E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{x^2 + 4y^2 + z^2 = 9}_{g(x,y,z)}\}$$

$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$ Lagrange Multiplikatoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda x \\ 8\lambda y \\ 2\lambda z \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda \neq 0, \quad x = \frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{2\lambda}, \quad z = -\frac{1}{\lambda}$$

Außerdem $x^2 + 4y^2 + z^2 = 9$

↳ x, y, z einsetzen

$$\frac{1}{4\lambda^2} + 4 \cdot \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 9 \quad | \cdot \lambda^2$$

$$\frac{1}{4} + 1 + 1 = 9\lambda^2$$

$$\frac{9}{4} = 9\lambda^2 \quad | : 9$$

$$\frac{1}{4} = \lambda^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\lambda = \pm \frac{1}{2}$$

↳ krit. Punkte

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{P_1} \text{ und } \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{P_2}$$

P_1 in f: $x + 4y - 2z + 9$

$1 + 4 + 4 + 9 = 18$ Maximum

P_2 in f: $-1 - 4 - 4 + 9 = 0$ Minimum