F19T3A5

a) Bestimme die allgemeine reellwertige Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) + y^{(2)}(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $y^{(k)}$ die k-te Ableitung von y bezeichnet.

b) Bestimme die allgemeine reellwertige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) + y^{(2)}(x) = 12x + 20\exp(2x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zu a):

Wir betrachten das charakteristische Polynom der Differentialgleichung, $\chi(x) = x^4 + x^2 = x^2(x+i)(x-i)$. Dieses hat die Nullstellen $0, \pm i$, wobei 0 doppelte Nullstelle und $\pm i$ jeweils einfache Nullstellen sind. Nach Vorlesung bilden damit $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$ ein reellwertiges Fundamentalsystem der Differentialgleichung, wobei

$$\mu_1\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}, \quad \mu_2\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array},$$
$$\mu_3\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}, \quad \mu_4\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$$

sind.

Die allgemeine Lösung $\lambda_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dieser homogenen Differentialgleichung schreibt sich dann als Linearkombination der Lösungen aus dem Fundamentalsystem, also

$$\lambda_0(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \sin(x) + c_4 \cos(x), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Zu b):

Die in a) gefundene Lösung λ_0 ist offenbar die Lösung der homogenen Differentialgleichung von b). Um die speziellen Lösung zu finden, mache zunächst den Ansatz $\lambda_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\lambda_p(x) = 2x^3 + \exp(2x)$. Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung ergibt

$$\lambda_p^{(4)}(x) + \lambda_p^{(2)}(x) = 2^4 \cdot e^{2x} + 2^2 \cdot e^{2x} + 2 \cdot 6 \cdot x = 20e^{2x} + 12x$$

Damit haben wir offensichtlich eine partikuläre Lösung zur Differentialgleichung in b) gefunden. Die allgemeine reellwertige Lösung $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist dann die Summe von homogener und partikulärer Lösung, also $\mu(x) = \lambda_0(x) + \lambda_p(x)$.