F19T3A3

a) Erstelle eine beschriftete Skizze der Menge

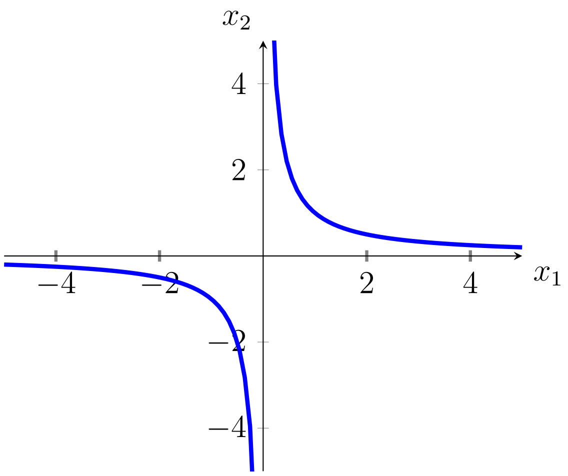
$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 = 1\right\}.$$

b) Sei $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $w_2 > 0$. Bestimme in Abhängigkeit von w alle lokalen Extremstellen der linearen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = w_1 x_1 + w_2 x_2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2,$$

unter der Nebenbedingung, dass $x_1 x_2 = 1$ gilt.
Diskutiere, ob es sich bei den lokalen Extremstellen jeweils um ein lokales/ globales Maximum/ Minimum handelt.

Zu a):



Zu b):

Wir nennen die Menge aus Aufgabenteil a) M und bemerken zunächst, dass $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ für alle $(x_1, x_2) \in M$ gilt - sonst wäre das Produkt $x_1 x_2 = 0 \neq 1$. Daher gilt für alle $(x_1, x_2) \in M$ die Gleichheit $x_1 = \frac{1}{x_2}$ und damit

$$f(x_1, x_2) = w_1 \frac{1}{x_2} + w_2 x_2 =: g(x_1).$$

Um also die Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $(x_1, x_2) \in M \Leftrightarrow x_1 x_2 = 1$ herauszufinden, betrachten wir zunächst die Extremstellen von $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Die Kandidaten hierzu sind die Nullstellen von

$$g'(x) = -\frac{w_1}{x^2} + w_2 = \frac{w_2}{x^2} \cdot \left(x^2 - \frac{w_1}{w_2}\right).$$

Die Extremstellen von g erfüllen also die Relation $x^2 = \frac{w_1}{w_2}$. Im Fall $\frac{w_1}{w_2} < 0$ (wegen

$w_2 > 0$ ist das äquivalent zu $w_1 < 0$) gibt es also keine reellen Extremstellen von g und damit auch keine Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $x_1x_2 = 1$.

Im Fall $w_1 = 0$ ist $g'(x) = w_2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ - auch hier gibt es also keine reellen Extremstellen von g und damit auch nicht von f unter der Nebenbedingung $x_1x_2 = 1$.

Ansonsten sind die Extremstellenkandidaten von g durch $\pm\sqrt{\frac{w_1}{w_2}}$. Wegen

$$g''\left(\pm\sqrt{\frac{w_1}{w_2}}\right) = \frac{2w_1}{\left(\pm\sqrt{\frac{w_1}{w_2}}\right)^3} \begin{cases} > 0 & \text{bei } + \\ < 0 & \text{bei } - \end{cases}, \qquad \text{da } w_1, w_2 > 0,$$

handelt es sich bei $\sqrt{\frac{w_1}{w_2}}$ um ein Minimum von g und bei $-\sqrt{\frac{w_1}{w_2}}$ um ein Maximum von g. Diese sind wegen

$$\lim_{x \nearrow 0} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x \searrow 0} g(x) = \infty$$

nicht global.

Entsprechend ist $+\left(\sqrt{\frac{w_1}{w_2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{w_1}{w_2}}}\right)$ ein lokales Minimum und $-\left(\sqrt{\frac{w_1}{w_2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{w_1}{w_2}}}\right)$ ein lokales Maximum von f.