# F19T3A2

a) Seien $(a_k)_{k\geq 1}$ und $(b_k)_{k\geq 1}$ Folgen reeller Zahlen mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty$. Beweise mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Dreiecksungleichung im $\mathbb{R}^n$, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ absolut konvergiert und folgende Abschätzung erfüllt:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

b) Beweise, dass für alle $n \geq 2$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = 2 - \frac{1}{n}.$$

c) Sei $(c_k)_{k\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2 < \infty$. Beweise, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ absolut konvergiert und folgende Abschätzung erfüllt:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_k\right| \leq \sqrt{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

**Zu a):**

Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachte die Vektoren $a := \begin{pmatrix} |a_1| \\ ... \\ |a_n| \end{pmatrix}, b := \begin{pmatrix} |b_1| \\ ... \\ |b_n| \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.
Es gilt nach Definition des Standardskalarprodukts und mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| = \left\langle \begin{pmatrix} |a_1| \\ ... \\ |a_n| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |b_1| \\ ... \\ |b_n| \end{pmatrix} \right\rangle \leq \sqrt{||a||^2||b||^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} =: M_n.$$

Damit ist die Folge der Partialsummen $\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende und durch $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} M_n < \infty$ beschränkte und damit konvergente Folge. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergiert also absolut.
Zum Nachweis der Ungleichung stellen wir fest, dass aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq M_n$$

und damit, weil beide Grenzwerte existieren, auch

$$\lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \lim_{n\in\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \lim_{n\to\infty} M_n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

was zu zeigen war. Im letzten Schritt wurde die Konvergenz der Reihen mit Folgengliedern $a_k^2$ bzw. $b_k^2$ verwendet.

**Zu b):**

Wir stellen zunächst für $k \in \mathbb{N}, k > 1$ fest:

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k} \cdot \underbrace{\frac{1}{k}}_{\leq \frac{1}{k-1}} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Damit folgt auch für die Reihe:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n},\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Zeile die Kenntnis des Grenzwerts der Teleskopsumme verwendet wurde.

**Zu c):**

Nach Teil b) gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{1}{n} = 2$.
Zusammen wird der Voraussetzung $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2 < \infty$ und Teil a) folgt dann, dass $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot (kc_k)$ absolut konvergiert und, dass die Abschätzung

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (kc_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

gilt.