F19T3A1

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl.

a) Bestimme für die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^n - 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ alle Nullstellen mit strikt positivem Realteil.

b) Sei $z \in \mathbb{C}$ eine der Nullstellen mit $\operatorname{Re}(z) > 0$ aus Teilaufgabe a). Zeige, dass $w = z + z^{n-1}$ eine reelle Zahl echt größer Null ist.

c) Sei $n = 5$ und $w > 0$ eine der positiven reellen Zahlen aus Teilaufgabe a). Nimm $w \neq 2$ an und zeige, dass

$$w^2 + w - 1 = 0$$

gilt. Bestimme den Winkel $\alpha \in]0, \pi[$ mit $w = 2\cos(\alpha)$.

Zu a):

$z^n = 1$ wird gelöst durch die Einheitswurzeln $e^{\frac{k+1}{n}2\pi i}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$e^{\frac{k+1}{n}2\pi i} = \cos\left(\frac{k+1}{n}2\pi\right) + i\sin\left(\frac{k+1}{n}2\pi\right)$$

Sei $l \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\cos\left(\frac{l}{n}2\pi\right) > 0$

$$\frac{l}{n}2\pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\ \cup \ \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{l}{n}2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\ \cup \ \left]\frac{3}{2}, 2\right]$$

Dies sind alle Nullstellen mit strikt positiven Realteil.

Alternative a):

Es sei $N := \left\{e^{i\frac{2\pi k}{n}} \mid 0 \leq k < n\right\}$. Da die Elemente in N alle verschieden sind (die Exponentialfunktion ist schließlich $2\pi i$-periodisch), enthält N genau n verschiedene Elemente. Wegen

$$f\left(e^{i\frac{2\pi k}{n}}\right) = \left(e^{i\frac{2\pi k}{n}}\right)^n - 1 = 1 - 1 = 0$$

und weil f als Polynom von Grad n höchstens n verschiedene Nullstellen hat, ist N genau die Nullstellenmenge von f.
Nach der Euler-Formel gilt $e^{i\frac{2\pi k}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$, also haben genau die Nullstellen von f positiven Realteil, für die $\frac{2\pi k}{n} \in [0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ gilt.
Die gesuchte Menge der Nullstellen von f mit positivem Realteil ist also gegeben durch

$$N_+ := \left\{e^{i\frac{2\pi k}{n}} \;\middle|\; 0 \leq k < \frac{n}{4} \quad \vee \quad \frac{3n}{4} < k < n\right\}.$$

Zu b):

Vorab gilt:

$$z^n = 1 \text{ und } z\bar{z} = 1 = z\tfrac{1}{z} \;\Rightarrow \text{für } z \neq 0 \text{ ist } \tfrac{1}{z} = \bar{z}.$$

Beweis:

$$\begin{array}{ccccccc} z^{n-1} & = & z^n\frac{1}{z} & = & \frac{1}{z} & = & \bar{z} \\ w & = & z+\bar{z} & = & 2\mathrm{Re}(z) & > & 0 \end{array}$$

Alternative b):

Sei also $z \in N_+$. Dann gibt es ein geeignetes $k \in \mathbb{N}$ mit $z = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$. Damit ist dann aber auch

$$z^{n-1} = e^{i\frac{2\pi k}{n}\cdot(n-1)} = e^{-i\frac{2\pi k}{n}} = \bar{z}.$$

Die Summe $w := z + z^{n-1} = z + \bar{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$ ist also reell. Da z bereits strikt positiven Realteil aufweist, gilt das damit auch für w.

Zu c):

Wegen $n = 5$ gilt $z^5 = 1$ und $z \neq 1$, da $w = z + \bar{z} \neq 2$.

$$\begin{array}{lllll} w^2+w-1 = & (z+z^4)^2+(z+z^4)-1 & = & z^2+2z^5+z^8+z+z^4-1 & = \\ & z^2+1+z^3+z+z^4 & = & \sum\limits_{k=0}^{4} z^k = \frac{1-z^{4+1}}{1-z} = \frac{1-1}{1-z} & = \quad 0 \end{array}$$

Für w gilt laut Teil b): $w > 0$ und $w \leq 2$

$$\cos(\alpha) = \frac{w}{2} \;\in\,]0,1[\quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{w}{2}\right)$$

Alternative c):

Im Fall $n = 5$ ist N_+ gegeben durch $\left\{1, e^{\pm i\frac{2\pi}{5}}\right\}$. Damit ist $w = 2$, wenn wir $z = 1$ wählen, und $w = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ in den beiden anderen Fällen. Der gesuchte Winkel α im Fall $w \neq 2$ ist also $\frac{2\pi}{5} \in]0,\pi[$. Einsetzen in den Taschenrechner ergibt dann

$$4\cos^2(\alpha) + 2\cos(\alpha) - 1 = 0.$$

Anmerkung: Das Verweisen auf den Taschenrechner ist im Examen natürlich mutig. Alternativ also der folgende Weg:

$$w^2 + w^1 - 1 = (z+z^4)^2 + (z+z^4) - 1 = z^2 + 2z^5 + z^8 + z + z^4 - 1 = \Phi_5(z) = 0$$

wobei Φ_5 das 5.-te Kreisteilungspolynom bezeichnet.
Wir haben hierbei verwendet, dass die Menge N im Fall $n = 5$ gerade die fünften Einheitswurzeln enthält und dass die primitiven Einheitswurzeln (das ist im Fall $n = 5$ gerade die Menge $N \setminus \{1\}$) gerade die Nullstellen des 5.-ten Kreisteilungspolynoms sind.