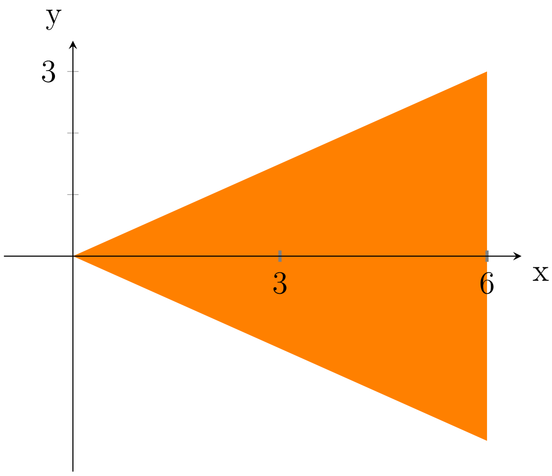
F19T2A5

a) Gegeben sei die Menge $\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R} : 0 \leq 2|y| \leq x \leq 6\}$. Skizziere diese Menge in einem kartesischen Koordinatensystem und berechne den Wert des Integrals $\iint_\Delta (x-y)^2 dxdy$.

b) Gegeben sei die Funktion $f : D \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{1+z^3}$ mit Definitionsbereich $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Berechne den Wert des Integrals $\int_\gamma f(z)dz$ mit $\gamma : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto 2e^{it}$. Entscheide mit Begründung, ob f eine holomorphe Stammfunktion auf D besitzt.

Zu a):



Da die Menge Δ offenbar kompakt und die Funktion $(x,y) \mapsto (x-y)^2$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ stetig ist, existiert das Integral

$$\begin{aligned}
\iint_\Delta (x-y)^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_0^6 \int_{-x/2}^{x/2} (x-y)^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^6 \left[-\frac{1}{3}(x-y)^3 \right]_{y=-x/2}^{y=x/2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3} \int_0^6 -\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{3x}{2}\right)^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \frac{26}{8} \int_0^6 x^3 \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 13}{2^3} \cdot \frac{6^4}{4} = 13 \cdot \frac{2^4 \cdot 3^4}{3 \cdot 2^4} = 13 \cdot 27 = 400 - 49 = 351.
\end{aligned}$$

Zu b):

Wegen $z^3 = -1 \Leftrightarrow z \in \left\{-1, -e^{i\frac{2\pi}{3}}, -e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\} =: N$ ist f auf D wohldefiniert und insbesondere holomorph, da alle Nullstellen des Nenners im Rand der Einheitskreisscheibe liegen. Wir können f sogar durch $\begin{array}{cccc} F: & \mathbb{C} \setminus N & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & (1+z^3)^{-1} \end{array}$ holomorph fortsetzen.

An dieser Stelle bemerken wir mit der Euler Formel

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

und analog

$$e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

F hat bei den Punkten in N jeweils eine Polstelle erster Ordnung, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to -1}(z+1)\cdot F(z) &= \lim_{z\to -1}\frac{1}{\left(z+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right)} \\
&= \frac{4}{9+3} = \frac{1}{3} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\,. \\
\lim_{z\to -e^{i\frac{2\pi}{3}}}\left(z+e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\cdot F(z) &= \lim_{z\to -e^{i\frac{2\pi}{3}}}\frac{1}{(z+1)\left(z+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(-1)} \\
&= -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \\
\lim_{z\to -e^{i\frac{4\pi}{3}}}\left(z+e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)\cdot F(z) &= \lim_{z\to -e^{i\frac{4\pi}{3}}}\frac{1}{(z+1)\left(z+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(-1)} \\
&= -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\,.
\end{aligned}$$

Damit haben wir auch gleich die Residuen von F an den entsprechenden Stellen ausgerechnet. Da nun $F = f$ auf $\mathrm{Spur}(\gamma) \subseteq D$ gilt, folgt auch mithilfe des Residuensatzes (anwendbar, weil γ nullhomolog in $\mathbb{C} = (\mathbb{C}\setminus N)\cup N$ ist):

$$\int_\gamma f\ \mathrm{d}z = \int_\gamma F\ \mathrm{d}z = 2\pi i\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-4\pi i}{3} \neq 0.$$

Hierbei haben wir verwendet, dass γ den Rand des Kreises $\{z\in\mathbb{C}|z| < 2\}$ genau einmal in mathematisch positiver Richtung durchläuft und die Umlaufzahlen der Polstellen (die ja alle in dem Kreis enthalten sind) demnach genau $+1$ ist.
Weil das Wegintegral von f über γ nicht null ist, kann f auf D auch keine holomorphe Stammfunktion haben.