F19T2A4

a) Zeige, dass für jedes $\xi > -1$ das Anfangswertproblem

$$x' = \frac{1}{x+t} - 1 \quad , \quad x(1) = \xi \tag{1}$$

eine eindeutige maximale Lösung $\lambda_\xi : I_\xi \to \mathbb{R}$ besitzt.

b) Bestimme für $\xi > -1$ die maximale Lösung λ_ξ von (**??**). Gib auch deren Definitionsbereich (mit Begründung) explizit an.
Hinweis: Die Substitution $y(t) := x(t) + t$ kann hier helfen.

c) Zeige, dass $\lambda_0 : I_0 \to \mathbb{R}$ eine asymptotisch stabile Lösung von $x' = \frac{1}{x+t} - 1$ ist.

Zu a):

Definiere $V := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x + t > 0\}$. Es handelt sich hierbei gerade um den Bereich, der oberhalb der Gerade $x(t) = -t$ im t-x-Diagramm ist. Insbesondere ist V ein Gebiet. Die Funktion $\begin{array}{cccc} f: & V & \to & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \mapsto & \frac{1}{x+t} - 1 \end{array}$ ist damit nicht nur wohldefiniert, sondern auch stetig differenzierbar und damit lokal Lipschitz-stetig in der zweiten Variablen. Nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz gibt es also für jedes $(1, \xi) \in V$ eine eindeutige maximale Lösung $\lambda_\xi : I_\xi \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall I_ξ mit $1 \in I_\xi$. Die Bedingung $(1, \xi) \in V$ ist dabei äquivalent zur Bedingung $1 + \xi > 0 \Leftrightarrow \xi > -1$. Also gibt es für jedes $\xi > -1$ eine solche eindeutige maximale Lösung.

Zu b):

Wir folgen dem Hinweis und definieren $y(t) := x(t) + t$. Dann ist:

$$y'(t) = x'(t) + 1 = \frac{1}{x(t) + t} = \frac{1}{y(t)}, \quad y(1) = x(1) + 1 = \xi + 1 > 0$$

Da wir vermuten, dass dieses Anfangswertproblem für $y(t)$ durch den Ansatz $\begin{array}{cccc} \mu: & [1, \infty[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \sqrt{2(t-1) + (\xi+1)^2} \end{array}$ gelöst wird, stellen wir die Behauptung auf, dass $\begin{array}{cccc} \lambda: &]a, \infty[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \sqrt{2(t-1) + (\xi+1)^2} - t \end{array}$ mit noch zu bestimmendem $a \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung zu (**??**) ist. Die Funktion λ ist genau dann wohldefiniert, wenn

$$2(t-1) + (\xi+1)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \geq -\frac{(\xi+1)^2}{2} + 1.$$

Wir setzen also $a := -\frac{(\xi+1)^2}{2} + 1$. Wegen $\xi + 1 > 0$ ist $a < 1$ und damit der Anfangszeitpunkt 1 im offenen Intervall $]a, \infty[$ enthalten. Auf diesem Intervall ist

λ dann auch stetig differenzierbar mit:

$$\lambda'(t) = \frac{2}{2\sqrt{2(t-1)+(\xi+1)^2}} - 1 = \frac{1}{\lambda(t)+t} - 1.$$

Wegen $\lambda(1) = \xi + 1 - 1 = \xi$ ist λ also Lösung von (**??**). Es bleibt noch nachzuweisen, dass λ auch die maximale Lösung ist. Wir stellen hierzu fest, dass die obere Intervallgrenze ∞ ist und für die untere Intervallgrenze a gilt:

$$\lim_{t \searrow a} (t, \lambda(t)) = \left(a, \sqrt{2(a-1)+(\xi+1)^2} - a\right) = (a, -a) \in \partial V,$$

wobei $\partial V = \{(t,x) \in \mathbb{R} \mid x + t = 0\} = \{(t,-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ verwendet wurde. Da V der maximal mögliche zusammenhängende Definitionsbereich von f mit $(1, \xi) \in V$ ist, handelt es sich bei λ also um die gesuchte maximale Lösung und bei $]a, \infty[$ um das Intervall I_ξ.

Zu c):

(Wir können das δ aus der Definition beliebig wählen.)
Für $\xi > -1$ mit $|\xi - 0| < 1$ sei λ_ξ die maximale Lösung, die auch schon in Teil a) berechnet wurde. Dann gilt für alle $t > 2$ (wie in a) bemerkt, ist t damit in jedem Fall in den Intervallen I_0, I_ξ enthalten):

$$\begin{aligned}
|\lambda_\xi(t) - \lambda_0(t)| &= \left|\sqrt{2(t-1)+(\xi+1)^2} - t - \left(\sqrt{2(t-1)+(0+1)^2} - t\right)\right| \\
&= \left|\sqrt{2(t-1)+(\xi+1)^2} - \sqrt{2(t-1)+(0+1)^2}\right| \\
&= \left|\int_1^{(\xi+1)^2} \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\sqrt{2(t-1)+\eta}\right) \,\mathrm{d}\eta\right| \\
&= \left|\int_1^{((\xi+1)^2} \frac{1}{2\sqrt{2(t-1)+\eta}} \,\mathrm{d}\eta\right| \leq \left|\int_1^{(\xi+1)^2} \frac{1}{2\sqrt{2(t-1)}} \,\mathrm{d}\eta\right| \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2(t-1)}} \underbrace{\left|(\xi+1)^2 - 1\right|}_{<42} \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Also ist die Lösung λ_0 attraktiv und weil wir hier eine skalare Differentialgleichung betrachten, für die der globale Existenz- und Eindeutigkeitssatz anwendbar ist, auch stabil.