F19T2A3

Es sei $A := \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $t \mapsto \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$.

a) Bestimme die Fundamentalmatrix e^{At} zu $x' = Ax$.

b) Bestimme die maximale Lösung von

$$x' = Ax + g(t) \quad , \quad x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Zeige, dass die in b) bestimmte Lösung von $x' = Ax + g(t)$ asymptotisch stabil ist.

Zu a):

Wir bestimmen die Eigenwerte von A als Nullstellen von

$$\det \begin{pmatrix} -2-x & -1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = (2+x)x + 1 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

Also ist $\lambda = -1$ doppelter Eigenwert von A. Weiter ist

$$\mathrm{Eig}(A, -1) = \ker(A + E_2) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Da der Hauptraum in $\mathbb{R}^2$ enthalten ist und die Dimension zwei haben muss, gilt $\mathcal{H}(A, -1) = \mathbb{R}^2$. Offensichtlich ist damit $v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}(A, -1) \setminus \mathrm{Eig}(A, -1)$. Definiere damit $v_1 := (A + E_2)v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Eig}(A, -1)$ und die Transformationsmatrix $T := (v_1 | v_2)$. Nach Vorlesung führt diese Konstruktion dann auf die Jordannormalform

$$J := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot A \cdot T \qquad \text{mit } T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, T^{-1} = \frac{1}{0-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} e^{At} = Te^{Jt}T^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -t & -1-t \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zu b):

Mithilfe der Lösungsformel ist die maximale Lösung gegeben durch die Funktion $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= e^{A(t-1)} \cdot x(1) + e^{-A(t-1)} \cdot \int_1^t e^{A(s-1)} \cdot g(s)\ \mathrm{d}s \\
&= e^{1-t} \cdot \begin{pmatrix} 1-(t-1) & -(t-1) \\ (t-1) & 1+(t-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\qquad + e^{1-t} \cdot \begin{pmatrix} 2-t & 1-t \\ t-1 & t \end{pmatrix} \cdot \int_1^t e^{s-1} \cdot \begin{pmatrix} s & s-1 \\ 1-s & 2-s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -s \\ s \end{pmatrix}\ \mathrm{d}s \\
&= e^{1-t} \cdot \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} + e^{1-t} \cdot \begin{pmatrix} 2-t & 1-t \\ t-1 & t \end{pmatrix} \cdot \int_1^t e^{s-1} \cdot \begin{pmatrix} -s^2+s^2-s \\ -s+s^2+2s-s^2 \end{pmatrix}\ \mathrm{d}s \\
&= e^{1-t} \cdot \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} + e^{1-t} \cdot \begin{pmatrix} 2-t & 1-t \\ t-1 & t \end{pmatrix} \cdot \int_1^t e^{s-1} \cdot \begin{pmatrix} -s \\ s \end{pmatrix}\ \mathrm{d}s \\
&= e^{1-t} \cdot \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} + e^{1-t} \cdot \begin{pmatrix} 2-t & 1-t \\ t-1 & t \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1-s \\ -1+s \end{pmatrix} \cdot e^{s-1} \right]_{s=1}^{s=t} \\
&= e^{1-t} \cdot \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} + e^{1-t} \cdot \begin{pmatrix} 2-t & 1-t \\ t-1 & t \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1-t \\ -(1-t) \end{pmatrix} e^{t-1} \right] \\
&= e^{1-t} \cdot \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-t \\ -(1-t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Zu c):

Da der Realteil des Eigenwerts -1 kleiner als 0 ist, ist die Lösung asymptotisch stabil.