F19T1A4

a) Zeige: Das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= e^{2x} \end{aligned}$$

besitzt ein Erstes Integral S, d.h. es gibt eine nicht-konstante Funktion $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $t \mapsto S(x(t), y(t))$ für jede Lösung $t \mapsto (x(t), y(t))$ des Differentialgleichungssystems konstant ist.
Leite hieraus ab, dass jede Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ die Relation $y(t) = e^{x(t)}$ für alle t aus dem Definitionsbereich der Lösung erfüllt.

b) Zeige (z. B. mithilfe von a)), dass jede Lösung des Anfangswertproblems

$$x'' = e^{2x}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1 \tag{1}$$

auch das Anfangswertproblem

$$x' = e^x, \quad x(0) = 0$$

löst.

c) Bestimme (z. B. mithilfe von b)) die maximale Lösung des Anfangswertproblems (1).
Hinweis: Gib auch das maximale Definitionsintervall an.

Anmerkung: Die Existenz der maximalen Lösungen der in dieser Aufgabe betrachteten Anfangswertprobleme muss nicht begründet werden.

Zu a):

Idee:

Damit S ein Erstes Integral ist, muss gelten:

$$0 \overset{!}{=} \frac{d}{dt}\left[S(x(t), y(t))\right] = \frac{\partial S}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial S}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t) =$$
$$\overset{\text{DGL}}{=} \frac{\partial S}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot y(t) + \frac{\partial S}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot e^{2x(t)}$$

Vorgehen:

Es ist $\frac{dx}{dt} = y$ und $\frac{dy}{dt} = e^{2x} \to$ „Eliminiere“ t durch Division der beiden Gleichungen:

$$\frac{dy}{dy} = \frac{e^{2x}}{y} \Leftrightarrow \int y dy = \int e^{2x} dy \Rightarrow \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} e^{2x} + \tilde{c}$$

Ein Kandidat für ein Erstes Integral ist also $y^2 - e^{2x}$.

Lösung:

Wir zeigen die Behauptung $S(x,y) := y^2 - e^{2x}$ ist ein Erstes Integral. Sei hierzu $t \mapsto (x(t), y(t))$ eine Lösung des Systems. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\left[S(x(t),y(t))\right] = \frac{d}{dt}\left[y^2 - e^{2x}\right] = 2y(t)y'(t) - 2e^{x(t)}x'(t) =$$
$$\overset{\text{DGL}}{=} 2y(t)e^{2x(t)} - 2e^{x(t)}y(t) = 0,$$

also ist $S(x,y)$ ein Erstes Integral.
Es bleibt zu zeigen, dass jede Lösung des Anfangswertproblems mit $(x(0), y(0)) = (0,1)$ die Relation $y(t) = e^{x(t)}$ (für alle zulässigen t) erfüllt. Es sei hierzu wieder $t \mapsto (x(t), y(t))$ eine Lösung des Anfangswertproblems. Dann gilt:

$$y(t)^2 - e^{2x(t)} = c = y(0) - e^{2x(0)} = 1 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow y(t)^2 = e^{2x(t)} \;\Rightarrow\; y(t) = \pm e^{x(t)}$$

Die negative Lösung kann nun wie folgt ausgeschlossen werden: Es ist $y(0) = 1$ und $y(t)^2 = e^{2x(t)} \neq 0$ für alle t. Da $t \mapsto y(t)$ als Lösung der Differentialgleichung stetig ist und auf einem Intervall definiert ist, folgt $y(t) > 0$ (Zwischenwertsatz). Daher ist $y(t) = +e^{x(t)}$

Zu b):

Sei $t \mapsto x(t)$ Lösung des Anfangswertproblems (1) 2. Ordnung. Setzt man $y(t) := x'(t)$, so erhält man das System

$$\begin{cases} x' = y, & x(0) = 0 \\ y' = x'' = e^{2x}, & y(0) = x'(0) = 1. \end{cases}$$

Nach a) gilt $y(t) = e^{x(t)}$, d.h. $x'(t) = e^{x(t)}$, $x(0) = 0$.

Zu c):

Die maximale Lösung $x : I_{\max} \to \mathbb{R}$ löst $x' = e^x$, $x(0) = 0$.
Trennung der Variablen liefert:

$$\int_{x(0)=0}^{x(t)} e^{-\tilde{x}} d\tilde{x} = \int_0^t 1 ds \;\Leftrightarrow\; -e^{-x}\Big|_{x=0}^{x(t)} = t \;\Leftrightarrow -e^{-t} + e^{-0} = t \;\Leftrightarrow\; e^{-x(t)} = 1 - t$$

Also $-x(t) = \ln(1-t)$ bzw. $x(t) = \ln\left(\frac{1}{1-t}\right)$ mit maximalem Existenzintervall $I_{\max} = (-\infty, 1)$.

(Dieses Intervall ist größtmöglich, wegen $\lim\limits_{t\to 1^-} x(t) = \lim\limits_{t\to 1^-} \ln\left(\frac{1}{1-t}\right) = +\infty$.)