F19T1A1

a) Es sei

$$P(z) := 2019z^{2019} + \sum_{k=0}^{2018} a_k z^k,$$

wobei $a_k \in \mathbb{C}, |a_k| < 1$ für alle $k = 0, ..., 2018$ gelte.
Bestimme die Anzahl der Nullstellen von P in der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ (mit Berücksichtigung von Vielfachheiten gezählt).

b) Formuliere für den Spezialfall holomorpher Funktionen das Argumentprinzip (auch als Satz vom nullstellenzählenden Integral bekannt).

c) Es sei P wie in (a) definiert. Zeige

$$\exp\left(\frac{1}{673}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{P'(z)}{P(z)} dz\right) = 1.$$

Hierbei bezeichnet $\partial\mathbb{D}$ die einmal im mathematisch positiven Sinne durchlaufene Einheitskreislinie.

Zu a):

Definiere die beiden offensichtlich holomorphen Funktionen $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & 2019z^{2019} \end{array}$

und $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \sum_{k=0}^{2018} a_k z^k \end{array}$. Dann gilt für alle $z \in \partial\mathbb{D}$ (also $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$):

$$|g(z)| \leq \sum_{k=0}^{2018} |a_k||z|^k < \sum_{k=0}^{2018} 1 = 2019 = 2019|z|^{2019} = |f(z)|$$

Weil f bei 0 eine 2019-fache Nullstelle und sonst (als Monom vom Grad 2019) keine weiteren Nullstellen in $\mathbb{C}$ hat, hat $P = f + g$ nach dem Satz von Rouché 2019 Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt) in $\mathbb{D}$.

Zu b):

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die auf keiner Zusammenhangskomponente verschwinde. Weiter sei $\gamma : [0, 1] \to U$ ein nullhomologer, geschlossener stückweiser C^1-Weg, der keine Null- oder Polstellen von f trifft. In diesem Fall ist

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot S,$$

wobei S die Summe der Nullstellen (mit Vielfachheit und den jeweiligen Umlaufzahlen gewichtet) von f abzüglich der Summe der Polstellen (mit Polstellenordnung und den jeweiligen Umlaufzahlen gewichtet) im Inneren von γ bezeichne. Das Innere von γ ist dabei die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid n(\gamma, z) \neq 0\}$.

Zu c):

Es sei γ ein geschlossener, stückweiser C^1 Weg, der $\partial\mathbb{D}$ einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufe. Nach dem Argumentprinzip gilt, weil P in der Einheitskreisscheibe keine Polstellen und insgesamt 2019 Nullstellen mit Vielfachheit gewichtet hat:

$$\exp\left(\frac{1}{673}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{P'(z)}{P(z)} dz\right) = \exp\left(\frac{1}{673} \cdot 2\pi i \cdot 2019\right) = \exp\left(3 \cdot 2\pi i\right) = 1.$$