F18T3A4

a) Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine schiefsymmetrische Matrix (d.h. $B^T = -B$). Zeige: $x^T Bx = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Seien $A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetige Abbildungen, so dass $A(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ positiv semidefinit und $B(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ schiefsymmetrisch ist. Zeige, dass $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, V(x) := x^T x$ eine Lyapunov-Funktion zu

$$\dot{x} = -\left(A(x) + B(x)\right) x$$

ist, d.h. zeige $\dot{V}(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

c) Auf $\mathbb{R}^2$ sei die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 + xy^2 \\ \dot{y} &= -x^2 y - 2y \end{aligned}$$

gegeben. Zeige, dass der Ursprung eine stabile Ruhelage ist.

Zu a):

Nach Definition des Standardskalarprodukts im $\mathbb{R}^n$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, Bx\rangle = \langle B^T x, x\rangle = \langle -Bx, x\rangle = -\langle Bx, x\rangle = -\langle x, Bx\rangle$$

Also muss $x^T Bx = \langle x, Bx\rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gelten.

Zu b):

Offensichtlich gilt $V(x) = ||x||^2 = \langle x, x\rangle$. Damit ist V in jedem Fall stetig differenzierbar mit $\frac{\partial V}{\partial x_i}(x) = 2x_i$ und es gilt

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \langle (\mathrm{grad} V)(x), \dot{x}\rangle = \langle (2x, -A(x)x - B(x)x\rangle \\ &= -2\underbrace{\langle x, A(x)x\rangle}_{\geq 0} - 2\underbrace{\langle x, B(x)x\rangle}_{=0} \leq 0 \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass A positiv semidefinit und B schief-symmetrisch ist.

Zu c):

Wir schreiben

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x^2 & -xy \\ xy & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{:=A(x,y)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -xy \\ xy & 0 \end{pmatrix}}_{:=B(x,y)} \Bigg) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Die Matrix B ist offenbar schief-symmetrisch und die Matrix A hat die Eigenwerte $x^2 \geq 0$ und $2 \geq 0$, ist also positiv semidefinit. Damit hat die Differentialgleichung die Form wie in Teil b) und die dort definierte Funktion V ist Lyapunow-Funktion zu dieser Differentialgleichung.

Klarerweise ist $(0,0)$ Ruhelage der Differentialgleichung. Wegen $V(0,0) = 0$ und $V(x,y) = x^2 + y^2 > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist 0 sogar stabile Ruhelage.