F18T3A3

Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{i, -i, 0\} \mapsto \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{(z+i)^2}{(z^2+1)^2} + \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right) \ .$$

a) Bestimme für jede der isolierten Singularitäten von f den Typ und gib den Hauptteil der Laurentreihenentwicklung in einer punktierten Umgebung für jede der isolierten Singularitäten an.

b) Zeige, dass f eine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{i, -i, 0\}$ besitzt.

Zu a):

Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i, 0\}$ gilt

$$f(z) = \frac{(z+i)^2}{(z+i)^2(z-i)^2} + \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{(z-i)^2} + \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right)$$

und damit $\lim\limits_{z \to -i} f(z) = \dfrac{1}{-4} + \exp(i) = -\dfrac{1}{4} + \cos(1) + i\sin(1) \neq 0$. Also hat f bei $-i$ eine hebbare Singularität und der Hauptteil ist identisch null.

Für $|z| < 1, z \neq 0$ gilt weiter

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z-i}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-z^{-2})^k = \frac{-1}{-i}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{1+\frac{z}{-i}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^{-2k} \\
&= -i \cdot \frac{\partial}{\partial z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{i}\right)^k + \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^k}{|k|!} z^{2k} \\
&= -i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{z}{i}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{i} + \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^k}{|k|!} z^{2k} \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \left(\frac{z}{i}\right)^k + 1 + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^k}{|k|!} z^{2k}}_{\text{Hauptteil der L.R.Entwicklung um 0}}
\end{aligned}$$

Damit ist 0 wesentliche Singularität von f, weil es unendliche viele nicht verschwindende Koeffizienten im Hauptteil gibt.

Der verbleibende Singularität $z = i$ ist ein Pol zweiter Ordnung, denn

$$\lim_{z \to i} (z-i)^2 f(z) = \lim_{z \to i} \left[1 + (z-i)^2 \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right)\right] = 1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \, .$$

Der Hauptteil hat also die Form $\frac{a_{-2}}{(z-i)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-i)}$ mit Koeffizienten $a_{-1/-2}$. Einerseits ist damit $a_{-2} = \lim_{z \to i} (z-i)^2 f(z) = 1$. Andererseits ist für

$$\begin{array}{rccc} G: & \mathbb{C}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & 1+(z-i)^2\exp\left(-\frac{1}{z^2}\right) \end{array}$$

- also die holomorphe Fortsetzung von $z \mapsto (z-i)^2 f(z)$:

$$\begin{aligned} a_{-1} = \operatorname{Res}(f,i) &= \frac{1}{(2-1)!}G^{(2-1)}(i) \\ &= \left[2(z-i)\exp\left(-\frac{1}{z^2}\right) + (z-i)\exp\left(-\frac{1}{z^2}\right)\cdot\frac{2}{z^3}\right]_{z=i} = 0 \end{aligned}$$

Damit ist der Hauptteil der Laurentreihenentwicklung von f um i für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z-i| < 1$ gegeben durch $z \mapsto \frac{1}{(z-i)^2}$.

Zu b):

Aus Aufgabenteil a) lassen sich die Residuen von f an den Singularitäten ablesen. Es gilt $\operatorname{Res}(f,-i) = \operatorname{Res}(f,0) = \operatorname{Res}(f,i) = 0$. Ist nun $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}\setminus\{0,\pm i\}$ ein beliebiger geschlossener stückweiser C^1 Weg, so folgt aus dem Residuensatz

$$\begin{aligned} \int_\gamma f \,\mathrm{d}z &= 2\pi i \cdot (\operatorname{Res}(f,0)\cdot n(\gamma,0) + \operatorname{Res}(f,i)\cdot n(\gamma,i) + \operatorname{Res}(f,-i)\cdot n(\gamma,-i)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Der Residuensatz ist hier anwendbar, weil f holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{0,\pm i\}$ ist und γ nullhomolog in $\mathbb{C} = (\mathbb{C}\setminus\{0,\pm i\}) \cup \{0,\pm i\}$ ist.

Also ist für jeden geschlossenen Weg γ wie oben das Wegintegral $\int_\gamma f \,\mathrm{d}z = 0$. Weil f insbesondere stetig ist, existiert damit eine Stammfunktion von f in $\mathbb{C}\setminus\{0,\pm i\}$.