F18T3A1

a) Zeige, dass das uneigentliche Integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+1} dx$$

existiert.

b) Berechne I mithilfe des Residuensatzes. Gib insbesondere Integrationspfade explizit an und weise nach, dass die Werte der Kurvenintegrale gegen das entsprechende Integral konvergieren.

Zu a):

Die Funktion $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x^2+1}$ ist offensichtlich stetig und damit auch messbar. Weiter gilt

$$\int_0^\infty \left|\frac{\cos(x)}{1+x^2}\right| \,\mathrm{d}x \leq \int_0^\infty \left|\frac{1}{1+x^2}\right| \,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \arctan'(x) \,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^R \arctan'(x) \,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \arctan(R) = \frac{\pi}{2}$$

wobei im Schritt von der ersten in die zweite Zeile der Satz von der monotonen Konvergenz (für die Funktionenfolge $\left(\arctan'(x) \cdot \chi_{[0,n]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$) verwendet wurde. Damit ist $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x^2+1}$ integrierbar und I existiert.

Zu b):

Sei $R > 1$.
Wir bemerken für $\begin{array}{rccc} \gamma_1: & [-R,R] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & t \end{array}$ und mithilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz ($\arctan'$ ist eine integrierbare Majorante) sowie der Achsensymmetrie der Funktion $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x^2+1}$:

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\cos(x)}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{\cos(x)}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{\mathrm{Re}(e^{ix})}{1+x^2}$$
$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{1+x^2} \,\mathrm{d}x\right) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{1+z^2} \,\mathrm{d}z\right).$$

Insofern ist es zweckmäßig, die Funktion $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}\setminus\{\pm i\} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \frac{e^{iz}}{1+z^2} = \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)} \end{array}$ zu betrachten. f hat einen Pol 1. Ordnung bei i, denn für alle $z \neq \pm i$ gilt

$$\lim_{z\to i} [(z-i)\cdot f(z)] = \lim_{z\to i} \frac{e^{iz}}{z+i} = \frac{e^{-1}}{2i} \in \mathbb{C}\setminus\{0\},$$

insbesondere ist $\mathrm{Res}(f,i) = \frac{e^{-1}}{2i}$. Wählen wir nun noch $\begin{array}{cccc} \gamma_2: & [0,\pi] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & R \cdot e^{it} \end{array}$,
so gilt für die für die Konkatenation $\gamma := \gamma_1 \dot{+} \gamma_2$ nach dem Residuensatz

$$e^{-1}\pi = 2\pi i \mathrm{Res}(f,i) = \int_\gamma f \; \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f \; \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f \; \mathrm{d}z$$

wobei der Residuensatz hier anwendbar ist, weil γ einen Halbkreis umrandet und damit nach unserer Konstruktion geschlossen und stückweise C^1 ist, weil γ außerdem nullhomolog in $\mathbb{C}$ und weil f holomorph ist und keine Singularität von f in $\mathrm{Spur}(\gamma)$ liegt. Da γ den Halbkreisrand genau einmal in mathematisch positiver Richtung durchläuft, ist die Umlaufzahl $n(\gamma, i) = 1$.

Weiter gilt mit der Standardintegralabschätzung:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} f \; \mathrm{d}z \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{1 + R^2 e^{2it}} \cdot iRe^{it} \; \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^\pi \frac{e^{-R\sin(t)}}{|1 + R^2 e^{2it}|} \cdot R \; \mathrm{d}t \\ &\leq \frac{R}{R^2 - 1} \cdot \pi \cdot \max_{t \in [0,\pi]} e^{-R\sin(t)} = \frac{\pi R}{R^2 - 1} \cdot 1 \overset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

wobei wir die umgekehrte Dreiecksungleichung $|1 + R^2 e^{2it}| \geq |R^2| - |1|$ verwendet haben. Damit folgt

$$e^{-1}\pi = 2\pi i \mathrm{Res}(f,i) = \lim_{R \to \infty} \int_\gamma f \; \mathrm{d}z = \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_1} f \; \mathrm{d}z.$$

Also ist

$$I = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Re}\left(\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{1 + z^2} \; \mathrm{d}z \right) = \frac{\pi}{2e}.$$