F18T2A5

Betrachte zu $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u''(x) - 4u(x) + 4u^3(x) &= 0, \\ u(0) &= u_0 \\ u'(0) &= u_1. \end{aligned}$$

a) Finde eine nichtnegative Funktion $G \in C(\mathbb{R})$, sodass

$$L(x) := \frac{1}{2}\left(u'(x)\right)^2 + G(u(x))$$

konstant in x ist.

b) Zeige, dass dieses Anfangswertproblem für beliebige $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung $u \in C^2(\mathbb{R})$ hat.

c) Bestimme stationäre Lösungen der Differentialgleichung. Welche Aussagen zur Stabilität lassen sich allein durch Anwendung des Prinzips der linearen Stabilität treffen?

Zu a):

Da L konstant in x sein soll, muss gelten:

$$0 = L'(x) = u'(x) \cdot u''(x) + \frac{\partial G}{\partial u}(u(x)) \cdot u'(x) = u'(x) \cdot \left(u''(x) + \frac{\partial G}{\partial u}(u(x)) \right)$$

Wähle also $G(u) = -2u^2 + u^4 + 1 = (u^2-1)^2 \geq 0$. Dann ist $G \in C(\mathbb{R})$ und

$$u''(x) + \frac{\partial G}{\partial u}(u(x)) = u''(x) - 4u(x) + 4(u(x))^3 = 0$$

und daher $L'(x) = 0$, also L (auf der zusammenhängenden Menge $\mathbb{R}$) konstant.

Zu b):

Wir definieren die Variablen $y_1(x) := u(x)$ und $y_2(x) = u'(x)$.
Es folgt

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u' \\ 4u - 4u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ 4y_1 - 4y_1^3 \end{pmatrix}$$

(mit impliziter x-Abhängigkeit).

Definiere auf dem Gebiet $\mathbb{R}^2$ die Funktion $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & y = (y_1, y_2) & \mapsto & \begin{pmatrix} y_2 \\ 4y_1 - 4y_1^3 \end{pmatrix} \end{array}.$

f ist offenbar stetig differenzierbar und damit gibt es nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für alle $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige maximale Lösung $\lambda_{(u_0,u_1)} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,(u_0,u_1)} \\ \lambda_{2,(u_0,u_1)} \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^2$ des Anfangswertproblems

$$y' = f(y), \quad y(0) = (u_0, u_1). \tag{1}$$

wobei das offene Intervall I den Punkt 0 enthält. Gemäß Vorlesung ist dann $\lambda_{1,(u_0,u_1)} : I \to \mathbb{R}$ die eindeutige, maximale Lösung vom Anfangswertproblem in der Aufgabenstellung. Wegen $\lambda'_{1,(u_0,u_1)} = \lambda_{2,(u_0,u_1)} \in C(I)$ ist $\lambda_{1,(u_0,u_1)} \in C^2(I)$.
Es bleibt noch zu zeigen, dass $I = R$ gilt. Seien $a < 0 < b$ mit $I =]a, b[$. Weil $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ keinen Rand hat, bleiben für die maximale Lösung $\lambda_{(u_0,u_1)}$ zwei Möglichkeiten im Hinblick auf b:

1. $b = \infty$
2. $b < \infty$ und $\lim\limits_{x \nearrow b} ||\lambda_{(u_0,u_1)}|| = \infty$.

Den zweiten Fall können wir aber mithilfe von Teil a) ausschließen. Dort hatten wir gesehen, dass die offensichtlich nicht-negative Funktion L entlang jeder Lösung konstant ist. Es folgt also für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} L(0) &= \frac{1}{2}u_1^2 + \left(u_0^2 - 1\right)^2 \\ = L(x) &= \frac{1}{2}\lambda_{2,(u_0,u_1)}(x)^2 + \left(\lambda_{2,(u_0,u_1)}(x)^2 - 1\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Gilt nun $\lim\limits_{x \nearrow b} ||\lambda_{(u_0,u_1)}|| = \lim\limits_{x \nearrow b} \sqrt{\lambda^2_{1,(u_0,u_1)}(x) + \lambda^2_{2,(u_0,u_1)}(x)} = \infty$, so folgte zunächst $\lim\limits_{x \nearrow b} \lambda^2_{i,(u_0,u_1)} = \infty$ für mindestens ein $i \in \{1, 2\}$ und damit auch $\lim\limits_{x \nearrow b} L(x) = \infty$, im Widerspruch zu dessen Konstanz. Daher bleibt nur $b = \infty$ und analog auch $a = -\infty$ übrig. Die gefundene eindeutige maximale Lösung ist also $\lambda_{1,(u_0,u_1)} \in C^2(\mathbb{R})$.

Zu c):

Die stationären Lösungen ergeben sich als Nullstellen von $u \mapsto -4u + 4u^3$. Diese sind also gegeben durch $u \in \{0, \pm 1\}$.
Damit wir das „Prinzip der linearen Stabilität“ anwenden können, betrachten wir wiederum die Funktion f aus Teil b).

$$(Df)(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 - 9y_1^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte von $(Df)(y_1, y_2)$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $z^2 - (4 - 9y_1^2)$, also $\pm\sqrt{4 - 9y_1^2}$.
Im Fall $(y_1, y_2) = (0, 0)$ sind die Eigenwerte demnach ± 2. Wegen $\mathrm{Re}(2) > 0$ ist die entsprechende stationäre Lösung $x \mapsto 0$ der Differentialgleichung aus der Aufgabenstellung instabil.
Im Fall $(y_1, y_2) = (+1, 0)$ sind die Eigenwerte $\pm\sqrt{-5} = i\sqrt{5}$. Wegen $\mathrm{Re}(\pm i\sqrt{5}) = 0$ kann hier keine Aussage über Stabilität getroffen werden.
Im Fall $(y_1, y_2) = (-1, 0)$ sind die Eigenwerte $\pm\sqrt{-5} = i\sqrt{5}$. Wegen $\mathrm{Re}(\pm i\sqrt{5}) = 0$ kann hier keine Aussage über Stabilität getroffen werden.