F18T2A4

Betrachte das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \sin(x) \cdot \sqrt{1 + 4y(x)}, \quad y(0) = y_0$$

zu Anfangswerten $y_0 \in [-1/4, \infty)$.

a) Gib eine möglichst große Menge von Anfangswerten an, für die das Anfangswertproblem lokal eindeutig lösbar ist.
Begründe, warum in den entsprechenden Anfangswerten lokale Eindeutigkeit der Lösung vorliegt.

b) Gib für Anfangswerte, für die eindeutige Lösbarkeit nicht gegeben ist, zwei verschiedene Lösungen an.

Zu a):

Auf dem Gebiet $V := \mathbb{R}\times] - 1/4, \infty[\subseteq \mathbb{R}^2$ definieren wir die Funktion

$$f: \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sin(x) \cdot \sqrt{1+4y} \end{array} .$$

f ist stetig und wegen $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(x) \cdot \frac{2}{\sqrt{1+4y}}$ auf ganz V partiell nach y differenzierbar und daher lokal Lipschitzstetig in der zweiten Variablen. Nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz gibt es dann für jedes Tupel $(0, y_0) \in V$ eine eindeutig maximale Lösung des Anfangswertproblems aus der Aufgabenstellung. Damit ist das Anfangswertproblem für alle $y_0 \in] - \frac{1}{4}, \infty[$ global, also auch lokal eindeutig lösbar.
(Anmerkung: Auch eine Argumentation mithilfe vom Satz über Trennen der Variablen ist möglich, da nur nach lokaler Eindeutigkeit gefragt ist.)

Zu b):

Im Fall $y_0 = -\frac{1}{4}$ ist in jedem Fall $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mu \equiv -\frac{1}{4}$ eine Lösung, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ ist:

$$\mu'(x) = 0 = \sin(x) \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \frac{-1}{4}} = \sin(x) \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \mu(x)}$$

Um einen weiteren Kandidaten zu finden, machen wir den Ansatz wie beim Trennen der Variablen.

$$\frac{\sqrt{1+4\lambda(x)}}{2} = \left[\frac{1}{2}\sqrt{1+4y}\right]_{-1/4}^{\lambda(x)} = \int_{-1/4}^{\lambda(x)} \frac{1}{\sqrt{1+4y}} \, \mathrm{d}y = \int_0^x \sin(x) \, \mathrm{d}x = 1 - \cos(x)$$

Definiere also $\lambda: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1-\cos(x))^2 - \frac{1}{4} \end{array}$.

Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$ zum einen $1 - \cos(x) \geq 0$ und damit

$$\begin{aligned}\lambda'(x) &= 2 \cdot (1 - \cos(x)) \cdot \sin(x) = \sin(x) \cdot \sqrt{4 \cdot (1 - \cos(x))^2 + 1 - 1} \\ &= \sin(x) \cdot \sqrt{1 + 4\lambda(x)}.\end{aligned}$$

Auch wegen $\lambda(0) = -\frac{1}{4}$ ist damit auch λ (neben μ) eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.