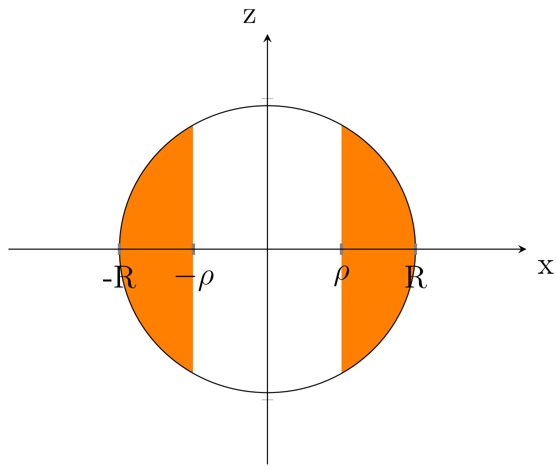
F18T2A3

Sei $R > \rho > 0$. Betrachte die Menge

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2,\ x^2 + y^2 > \rho^2\}.$$

Anschaulich betrachtet ist dies die Menge, die aus einer Kugel mit Radius R durch „Ausbohren“ eines Zylinders vom Radius ρ entsteht. Berechne das Volumen von M.

Lösung:



Sei λ^3 das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^3$

$$H := \{(x, y, z) \in M : z \geq 0\} \;\Rightarrow\; \lambda^3(M) = 2\lambda^3(H)$$

In Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\lambda^3(H) &= \int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\rho^{\sqrt{R^2-z^2}} dr\ r = 2\pi \int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} dz \frac{r^2}{2}\Big|_{r=\rho}^{r=\sqrt{R^2-z^2}} \\
&= \pi \int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} dz (R^2 - z^2 - \rho^2) \\
&= \pi (R^2 - \rho^2)\sqrt{R^2 - \rho^2} - \pi \frac{z^3}{3}\Big|_{r=\rho}^{r=\sqrt{R^2-\rho^2}} \\
&= \frac{2\pi}{3}\sqrt{R^2 - \rho^2}^3 \\
\Rightarrow \quad \lambda^3(M) &= \frac{4\pi}{3}\sqrt{R^2 - \rho^2}^3
\end{aligned}$$