F18T2A1

a) Wir betrachten die Gebiete

$$\Omega_1 := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x > 0, y > 0\}$$

und

$$\Omega_2 := \{z = x + iy \mid x \in \mathbb{R}, 0 < y < 1\}.$$

(1) Zeige, dass eine biholomorphe Abbildung $f : \Omega_2 \to \Omega_1$ existiert.

(2) Gib eine solche Abbildung explizit an.

b) Bestimme die Anzahl der Nullstellen (mit Vielfachheiten) des Polynoms

$$z^{87} + 36z^{57} + 71z^4 + z^3 - z + 1$$

in dem Kreisring $K_{1/2}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

Zu a, (1):

Das Gebiet Ω_1 ist gerade der erste Quadrant und damit offensichtlich einfach zusammenhängend (z.B. weil sternförmig zum Sternmittelpunkt $1 + i$) und nicht gleich $\mathbb{C}$.
Das Gebiet Ω_2 ist ein Streifen mit Breite 1 parallel zur reellen Achse und damit ebenfalls einfach zusammenhängen (z.B. weil sternförmig zum Sternmittelpunkt $\frac{1}{2}$) und nicht gleich $\mathbb{C}$. Damit gibt es nach dem Riemannschen Abbildungssatz biholomorphe Abbildungen $g : \Omega_1 \to \mathbb{E}, h : \Omega_2 \to \mathbb{E}$ auf die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$.
Die Komposition beider Abbildungen $f := g^{-1} \circ h : \Omega_2 \to \Omega_1$ ist dann wohldefiniert, weil $g^{-1} : \mathbb{E} \to \Omega_1$ als Umkehrfunktion der biholomorphen Abbildung $g : \Omega_1 \to \mathbb{E}$ existiert und außerdem biholomorph ist. Damit ist f als Komposition biholomorpher Abbildungen biholomorph.

Zu a, (2):

Das Gebiet Ω_2 lässt sich mithilfe der gestauchten komplexen Exponentialfunktion $\begin{array}{rccc} g: & \Omega_2 & \to & \mathbb{H} \\ & z & \mapsto & e^{z\cdot\pi} \end{array}$ auf die obere Halbebene $\mathbb{H}$ abbilden. Schreiben wir nämlich $z = x + iy$, so ist $g(z) = e^{\pi x} \cdot e^{i\pi y}$ und dabei handelt es sich für $x \in \mathbb{R}, y \in]0, 1[$ um die eindeutige Polardarstellung eines Elements aus der oberen Halbebene.
Die (bekanntlich) einfach zusammenhängende obere Halbebene können wir nun mithilfe des darauf wohldefinierten geeigneten Zweigs der 2. Wurzel/ des Hauptzweigs des Logarithmus auf den ersten Quadranten abbilden via $\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{H} & \to & \Omega_1 \\ & z & \mapsto & \sqrt{z} := e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}(z)} \end{array}$. Schließlich gilt für $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{H}$ gerade $h(z) = e^{\frac{1}{2}(\ln r + i\varphi)} = \sqrt{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}} \in \Omega_1$.

Als Verkettung biholomorpher Abbildungen sind g und h und damit auch deren Verkettung $f := h \circ g : \Omega_2 \to \Omega_1$ biholomorph. Es handelt sich bei f also um die gesuchte Abbildung.

Zu b:

Wir definieren zunächst

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & 71z^4 \end{array} \quad \text{und} \quad g_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^{87} + 36z^{57} + z^3 - z + 1 \end{array} .$$

Dann gilt für alle z im Rand der Kreisscheibe $K(0,1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \subseteq \mathbb{C}$

$$|g_1(z)| \leq |z|^{87} + 36|z|^{57} + |z|^3 + |z| + 1 = 40 < 71 = |f_1(z)|.$$

Weil f_1 in Null eine vierfache Nullstelle hat (und sonst in ganz $\mathbb{C}$ keine weitere), hat nach dem Satz von Rouché auch $f_1 + g_1$ in der Einheitskreisscheibe genau vier Nullstellen und auf dem Rand der Einheitskreisscheibe keine Nullstellen. Definieren nun andererseits

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^{87} \end{array} \quad \text{und} \quad g_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & 36z^{57} + 71z^4 + z^3 - z + 1 \end{array} .$$

Es folgt für alle z im Rand der Kreisscheibe $K(0,2) \subseteq \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} |g_2(z)| &\leq 36|z|^{57} + 71|z|^4 + |z|^3 + |z| + 1 \leq 2^6 \cdot 2^{57} + 2^7 \cdot 2^4 + 2^3 + 2 + 1 \\ &\leq 2^{63} \cdot 5 < 2^{87} = |f_2(z)|. \end{aligned}$$

Weil f_2 in $z = 0$ eine 87-fache Nullstelle (und sonst keine weiteren in $\mathbb{C}$) aufweist, haben f_2 und $f_2 + g_2$ nach dem Satz von Rouché in $K(0,2)$ genau 87 Nullstellen. Nimmt man nun beide Aussagen zusammen, so hat das gegebenen Polynom $z^{87} + 36z^{57} + 71z^4 + z^3 - z + 1 = (f_1 + g_1)(z) = (f_2 + g_2)(z)$ in $K(0,2)$ genau 87 und im Abschluss der Einheitskreisscheibe genau 4 Nullstellen. In $K_{1/2}(0) = K(0,2) \setminus \overline{K(0,1)}$ hat das Polynom also $87 - 4 = 83$ Nullstellen.